53. Die Rotationsbewegung eines zweiatomigen Moleküls wird durch die Lagrangefunktion:

$$L = \frac{I}{2}\left(\dot{\vartheta}^2 + \sin^2\vartheta\dot{\varphi}^2\right), \tag{1}$$

beschrieben, wobei $I$ das Trägheitsmoment, $0 < \vartheta < \pi$ der Polarwinkel, und $0 < \varphi < 2\pi$ der Azimuthalwinkel sind. Leiten Sie diesen Ausdruck für $L$ her, indem Sie das Molekül durch zwei Punktmassen $m_1, m_2$ im Abstand $R$ modellieren. Wie lautet die zugehörige Hamiltonfunktion $H$, ausgedrückt durch die kanonisch konjugierten Impulse $p_\vartheta$ und $p_\varphi$? Berechnen Sie für die kanonische Gesamtheit das klassische Zustandintegral des Rotors:

$$Z(T) = h^{-2}\int d\vartheta\, d\varphi\, dp_\vartheta\, dp_\varphi\, e^{-H/kT}. \tag{2}$$

54. Behandeln Sie das ideale nichtrelativistische Fermigas mit Spin $s = 1/2$ in zwei Raumdimensionen. Wie hängt der Fermi-Impuls $p_F$ mit der Teilchendichte $N/A$ ($A$ ist nun die Fläche) zusammen? In welchem Verhältnis stehen bei Temperatur $T = 0$ die Energie pro Teilchen $E_0/N$ und die Fermi-Energie $\epsilon_F = p_F^2/2m$? Berechnen Sie den exakten Ausdruck für die Verschiebung des chemischen Potentials $\mu(T, \epsilon_F)$ bei endlicher Temperatur $T > 0$. Bei welcher Temperatur $T_0$ wird das chemische Potential $\mu$ gleich Null? Hinweis: $(x+1)^{-1} = \sum_{l=1}^{\infty}(-1)^{l-1}x^{-l}$ und $\ln(x+1) = \sum_{l=1}^{\infty}(-1)^{l-1}x^l l^{-1}$.

55. Berechnen Sie für ultrarelativistische, masselose Spin-1/2 Fermionen deren Teilchenzahl nicht erhalten ist (sog. Majorana-Teilchen, die mit ihren Antiteilchen übereinstimmen) die freie Energie $F(T, V)$. Leiten Sie hieraus die thermodynamischen Grössen Druck $p$, Entropie $S$ und innere Energie $U$ ab. Berechnen Sie ebenso die mittlere Teilchenzahl $N(T, V)$. Vergleichen Sie die auftretende Stefan-Boltzmann-Konstante und die Energie pro Teilchen mit der des Photonengases. Hinweis: $\int_0^\infty dx\, x^3(e^x + 1)^{-1} = 7\pi^4/120$ und $\int_0^\infty dx\, x^2(e^x + 1)^{-1} = 3\zeta(3)/2$.

56. Betrachten Sie ein Gas von $N$ freien Elektronen im Volumen $V$ im ultrarelativistischen Regime. Die Einteilchenenergien sind nun $\epsilon(\vec{p}) = c|\vec{p}|$ mit $c$ der Lichtgeschwindigkeit. Berechnen Sie die Fermi-Energie $\epsilon_F$ des Systems. Wie lauten die Grundzustandsenergie $E_0$ und der Fermi-Druck bei $T = 0$? Berechnen Sie mittels der Sommerfeld-Näherung die Wärmekapazität $C_V(T)$ bei niedrigen Temperaturen $T << \epsilon_F/k$.

57. Um aus einem Metall auszutreten, müssen Elektronen eine Potentialbarriere der Höhe $V_0$ (relativ zur Fermi-Energie $\epsilon_F$) überwinden. Die Elektronen sollen als klassisches ideales Gas mit $\mu = \epsilon_F$ behandelt werden. Berechnen Sie die Stromdichte $j = e(N/V)\langle v_z\rangle$ der austretenden Elektronen als Funktion der Temperatur $T$. Hinweis: Das Metall befindet sich Halbraum $z < 0$ und die Impulse der Elektronen sind isotrop verteilt. Damit ein Elektron austreten kann, muß es eine Impulskomponente in $z$-Richtung $p_z > \sqrt{2m(V_0 + \epsilon_F)}$ besitzen.

58. Werten Sie getrennt den geraden und ungeraden Anteil:

$$Z_{rot}^{(g)}(T) = \sum_{l=gerade}(2l+1)\exp\left(-\frac{l(l+1)\theta_r}{2T}\right), \quad Z_{rot}^{(u)}(T) = \sum_{l=ungerade}(2l+1)\exp\left(-\frac{l(l+1)\theta_r}{2T}\right), \tag{3}$$

der quantenmechanischen Zustandssumme eines Rotors für hohe Temperaturen bis einschließlich der Ordnung $T^{-1}$ mittels der Euler-MacLaurin'schen Summenformel $\sum_{k=0}^{\infty} f(k) = \int_0^\infty dk\, f(k) + f(0)/2 - f'(0)/12 + f'''(0)/720 + \ldots$ aus. Zur Kontrolle:

$$Z_{rot}^{(g)}(T) = Z_{rot}^{(u)}(T) = \frac{T}{\theta_r} + \frac{1}{6} + \frac{\theta_r}{60T} + \mathcal{O}((\theta_r/T)^2). \tag{4}$$