

Vorlesungsskript

Mechanik der Kontinua

Prof. Dr. Roland Netz

Richard Rambach
Matthias Krippner

WS 2010/11

Inhaltsverzeichnis

1	Kinematik deformierbarer Körper	5
1.1	Geschwindigkeitsfeld einer Flüssigkeit	6
1.1.1	Lagrange- vs. Euler-Darstellung	6
1.1.2	Bahnkurven und Stromlinien	8
1.1.3	Quellen und Wirbel	9
1.2	Kontinuitätsgleichung	11
1.3	Bilanzgleichungen	12
1.3.1	Impulserhaltung - Spannungstensor	12
1.3.2	Energiebilanzgleichungen	15
1.3.3	Drehimpulsbilanz (\rightarrow Spannungstensor ist symmetrisch)	17
2	Hydrodynamik	19
2.1	Viskosität und Reibungstensor	19
2.2	Grundgleichungen der Hydrodynamik (Navier-Stokes-Gleichung, Euler-Gleichung)	24
2.3	Bernoulli-Gleichung	26
2.4	Liftkräfte auf bewegte Körper	32
2.4.1	2D-Potentialströmung	32
2.4.2	Kraft auf umströmten Zylinder	37
2.4.3	Wirbeldichte-Gleichung	39
2.4.3.1	Thomsonscher Wirbelsatz	41
2.4.3.2	Helmholtzsche Wirbelsätze	42
2.4.3.3	Konsequenzen, Beispiele	43
2.4.4	Lift-Theorem (konforme Abbildungen)	44
2.4.4.1	„Symmetrischer“ Flügel mit nur einer Singularität	47
2.4.4.2	Blasius-Theorem	48
2.4.4.3	Kutta-Joukowski-Auftriebtheorem	49
2.5	Viskositätseffekte	51
2.5.1	Hydrodynamische Ähnlichkeit	51
2.5.2	Grenzschichtphänomene	52
2.5.2.1	Impulsiv bewegte Platte	52
2.5.2.2	Methoden der Ähnlichkeitslösung	53
2.5.2.3	Wirbeldiffusion	55
2.5.2.4	Strömungen an einer Plattenkante	55
2.5.2.5	Prandtlsche Grenzschichttheorie	56
2.5.2.6	Effekte: Grenzschichtablösung	57
2.5.2.7	Einfachste Grenzschichtablösung: Planare Geometrie, stationäres Feld	58

1 Kinematik deformierbarer Körper

Unterschied zu bisherigen Vorlesungen

- Mechanik des Massepunktes
→ Translationsbewegungen weniger Körper
- starre Körper
→ Translation und Rotationen (Kreiseltheorie)
- statistische Mechanik: sehr viele Teilchen
→ Reduktion auf wenige Zustandsgrößen (T, P, V ...)
- Thermodynamik
→ *quasistatische* Zustandsänderungen

Kontinuumsmechanik

Körper beschrieben durch makroskopische Größen (z.B. Dichte, Geschwindigkeit, Druck ...) als stetige Funktionen von Raum und Zeit.

Körper \equiv Gase, Flüssigkeiten, elastische Festkörper ...

Dichte, Druck usw. an einem Raumpunkt immer definiert als Durchschnittswert in einem kleinen Volumenelement: Dieses muss groß genug sein für eine sinnvolle Definition des Durchschnitts und klein genug um die Phänomene aufzulösen.

1.1 Geschwindigkeitsfeld einer Flüssigkeit

1.1.1 Lagrange- vs. Euler-Darstellung

In einer strömenden Flüssigkeit sei zur Zeit t_0 ein Massenelement am Ort $\vec{r}^{(0)}$. Die Koordinaten $r_i^{(0)}$ mit $i = 1, 2, 3$ benutzt man im weiteren Zeitverlauf $t \geq t_0$ zur Kennzeichnung der Massenelemente („Labels“). Die Strömung ist vollständig beschrieben durch Angabe des momentanen Ortes $r_i(\vec{r}^{(0)}, t)$.

- **Lagrangedarstellung**

Geschwindigkeit:

$$v_i = \frac{\partial}{\partial t} r_i(\vec{r}^{(0)}, t) = v_i(\vec{r}^{(0)}, t) \quad (1.1)$$

Beschleunigung:

$$a_i = \frac{\partial}{\partial t} v_i(\vec{r}^{(0)}, t) \quad (1.2)$$

- **Eulerdarstellung**

Oft ist der Ursprung der Elemente irrelevant.

$$v_i = v_i(\vec{r}, t) = v_i(\vec{r}(\vec{r}^{(0)}, t), t) \quad (1.3)$$

(Substantielle) Beschleunigung, muss für festes $\vec{r}^{(0)}$ gebildet werden!

$$\begin{aligned} a_i(\vec{r}, t) &= \left. \frac{\partial}{\partial t} v_i(\vec{r}(\vec{r}^{(0)}, t), t) \right|_{\vec{r}^{(0)}} \\ &= \left. \frac{\partial v_i(\vec{r}, t)}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial v_i(\vec{r}, t)}{\partial r_j} \frac{\partial r_j(\vec{r}^{(0)}, t)}{\partial t} \right|_{\vec{r}^{(0)}} \\ &= \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial v_i}{\partial r_j} v_j = \dot{v}_i + v_j \nabla_j v_i = \dot{v}_i + \underbrace{(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) v_i}_{\text{konvektiver Anteil}} \end{aligned} \quad (1.4)$$

In der letzten Zeile wurde die EINSTEINSISCHE Summationskonvention verwendet:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_i a_i b_i \equiv a_i b_i \quad (1.5)$$

Allgemein definiert man für eine beliebige Größe $A(\vec{r}, t)$ die substantielle Zeitableitung (d.h. für festen Ursprungsort $\vec{r}^{(0)}$)

$$\boxed{\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) A} \quad \text{substantielle Zeitableitung} \quad (1.6)$$

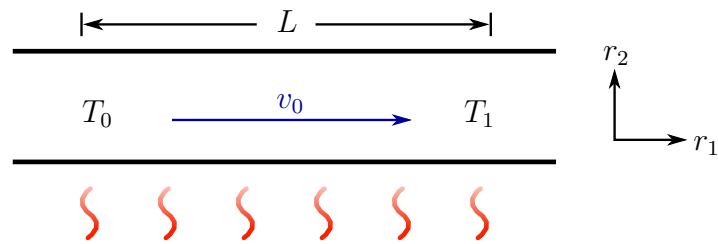
Beispiel: *Beheizter Zylinder*

Abbildung 1.1: Eine Flüssigkeit fließe mit konstanter Geschwindigkeit v_0 durch einen beheizten Zylinder. Zu Beginn eines Abschnitts der Länge L habe die Flüssigkeit die Temperatur T_0 und am Ende die Temperatur T_1 .

$$A = T(\vec{r}, t) = T_0 + (T_1 - T_0) \frac{r_1}{L} \quad \vec{v}(\vec{r}, t) = \begin{pmatrix} v_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.7)$$

$$\Rightarrow \quad \vec{\nabla} T = \begin{pmatrix} \frac{T_1 - T_0}{L} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \frac{\partial T}{\partial t} = 0 = \frac{\partial v}{\partial t} \quad (1.8)$$

Im Laborsystem ist das Temperaturprofil zeitlich konstant. Für ein mitbewegtes Massenelement ändert sich T jedoch mit der Zeit, die substantielle Zeitableitung verschwindet nicht!

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} T(\vec{r}, t) + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} T(\vec{r}, t) = \frac{v_0(T_1 - T_0)}{L} \quad (1.9)$$

1.1.2 Bahnkurven und Stromlinien

- **Bahnkurven** sind die Kurven $\vec{r}(\vec{r}^{(0)}, t)$, die von einzelnen Massepunkten durchlaufen werden. Sie werden experimentell durch Anfärben von Flüssigkeitselementen bestimmt.
- **Stromlinien** sind Raumkurven, deren Tangenten in jedem Punkt mit der Richtung der Geschwindigkeit übereinstimmen.

$$\frac{dr_1}{dr_2} = \frac{dv_1}{dv_2} \qquad \frac{dr_1}{dr_3} = \frac{dv_1}{dv_3} \qquad (1.10)$$

Für stationäre Strömungen, d.h. $\partial_t \vec{v} = 0$, gilt Bahnkurve \equiv Stromlinie.

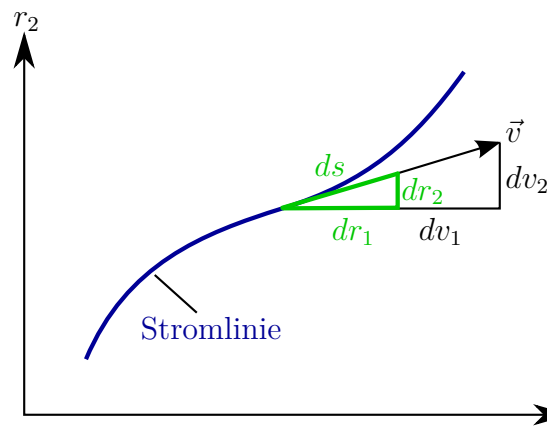


Abbildung 1.2: Zur Definition einer Stromlinie

Da die kontinuierliche Stromlinienschar nicht aufgetragen werden kann, benutzt man eine endliche Liniendichte, die per Konstruktion proportional zur lokalen Geschwindigkeit $|v|$ ist.

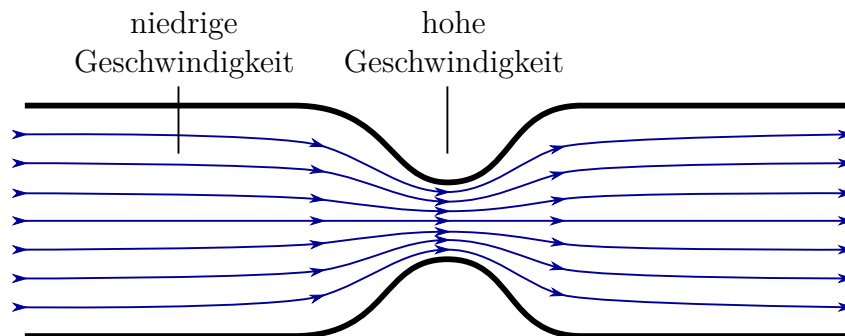


Abbildung 1.3: Stromlinien einer stationären Strömung mit veränderlichem Querschnitt

1.1.3 Quellen und Wirbel

Gegeben sei ein Strömungsfeld $\vec{v}(\vec{r}, t)$. Durch ein orientiertes Flächenelement $d\vec{F}$ strömt im Zeitintervall dt das Flüssigkeitsvolumen $\vec{v} \cdot d\vec{F} dt$, welches dem in Abb. 1.4 blau dargestellten schiefen Zylindervolumen entspricht.

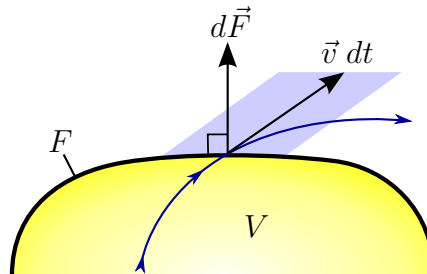


Abbildung 1.4: Strömung durch eine Fläche F

Analog erhält man $\int_F \vec{v} \cdot d\vec{F}$ für das Flüssigkeitsvolumen, das pro Zeiteinheit durch die Fläche F strömt.

Für geschlossene Flächen definiert man die **Quellstärke**

$$Q_V = \oint_{F(V)} \vec{v} \cdot d\vec{F} = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{v} dV \quad (\text{Gaußscher Integralsatz})$$

- $Q_V > 0$: Strömung hat **Quellen** im Bereich V
- $Q_V < 0$: Strömung hat **Senken** im Bereich V

verursacht durch Kompression bzw. Expansion (oder durch Erzeugung bzw. Vernichtung).

Die **Zirkulation** Γ einer Strömung entlang einer geschlossenen Kontur C ist

$$\Gamma = \oint_{C(F)} \vec{v} \cdot d\vec{r} = \int_F (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \cdot d\vec{F} \quad (\text{Stokesscher Integralsatz})$$

Beispiel: *Starre Rotation um feste Achse* $\vec{v} = \vec{\omega}_0 \times \vec{r}$

$$\vec{\nabla} \times \vec{v} = \vec{\nabla} \times (\vec{\omega}_0 \times \vec{r}) = 2\vec{\omega}_0 \quad \Rightarrow \text{Zirkulation } \Gamma = \int_F 2\vec{\omega}_0 \cdot d\vec{F} \quad (1.11)$$

- Man definiert die **Wirbeldichte** $\vec{\omega} = \frac{1}{2} \vec{\nabla} \times \vec{v}$ (im Beispiel ist $\vec{\omega}(\vec{r}) = \vec{\omega}_0$).
- Die Feldlinien des Wirbelfeldes $\vec{\omega}(\vec{r})$ sind die **Wirbellinien**.
- Das Integral $\int_F \vec{\omega}(\vec{r}) \cdot d\vec{F} = \frac{1}{2} \Gamma$ heißt **Wirbelfluss**.

Vektoralgebra

Alle wichtigen Identitäten können mit ε_{ijk} (\equiv vollständig antisymmetrischer Einheitstensor) hergeleitet werden.

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{falls } (i, j, k) \text{ gerade Permutation von } (1,2,3) \text{ ist,} \\ -1 & \text{falls } (i, j, k) \text{ ungerade Permutation von } (1,2,3) \text{ ist,} \\ 0 & \text{wenn mindestens zwei Indizes gleich sind.} \end{cases} \quad (1.12)$$

Konkret:

$$\varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = +1 \quad \varepsilon_{132} = \varepsilon_{321} = \varepsilon_{213} = -1 \quad \text{sonst: } \varepsilon_{ijk} = 0 \quad (1.13)$$

$$\vec{d} = \vec{b} \times \vec{c} \iff d_i = \varepsilon_{ijk} b_j c_k \quad (1.14)$$

$$\begin{aligned} \vec{e} = \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) &\iff e_i = \varepsilon_{ijk} a_j (\varepsilon_{klm} b_l c_m) \\ &= \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} a_j b_l c_m \\ \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} = \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl} &\rightarrow = \delta_{il} \delta_{jm} a_j b_l c_m - \delta_{im} \delta_{jl} a_j b_l c_m \\ &= a_j b_i c_j - a_j b_j c_i = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \cdot b_i - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot c_i \end{aligned} \quad (1.15)$$

Spezialfall: $\vec{e} = \vec{\nabla} \times (\vec{b} \times \vec{c})$

$$\Rightarrow e_i = \nabla_j b_i c_j - \nabla_j b_j c_i = b_i \nabla_j c_j + c_j \nabla_j b_i - c_i \nabla_j b_j - b_j \nabla_j c_i \quad (1.16)$$

$$\text{oder } \vec{e} = \vec{b} (\vec{\nabla} \cdot \vec{c}) - \vec{c} (\vec{\nabla} \cdot \vec{b}) + (\vec{c} \cdot \vec{\nabla}) \vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{\nabla}) \vec{c} \quad (1.17)$$

Anwendung auf die Wirbeldichte:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\omega}_0 \times \vec{r}) = \vec{\omega}_0 (\vec{\nabla} \cdot \vec{r}) - \vec{r} (\vec{\nabla} \cdot \vec{\omega}_0) + (\vec{r} \cdot \vec{\nabla}) \vec{\omega}_0 - (\vec{\omega}_0 \cdot \vec{\nabla}) \vec{r} = \vec{g} \quad (1.18)$$

In Komponenten:

$$\begin{aligned} g_i &= \omega_0^i \overbrace{\vec{\nabla} \cdot \vec{r}}^{=0} - r_i \overbrace{\vec{\nabla} \cdot \vec{\omega}_0}^{=0} + (\vec{r} \cdot \vec{\nabla}) \omega_0^i - (\vec{\omega}_0 \cdot \vec{\nabla}) r_i \\ &= \omega_0^i (\nabla_1 r_1 + \nabla_2 r_2 + \nabla_3 r_3) - (\omega_0^1 \nabla_1 + \omega_0^2 \nabla_2 + \omega_0^3 \nabla_3) r_i \\ &= 3\omega_0^i - \omega_0^i = 2\omega_0^i \end{aligned} \quad (1.19)$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \times (\vec{\omega}_0 \times \vec{r}) = 2\vec{\omega}_0 \quad (1.20)$$

1.2 Kontinuitätsgleichung

Die im raumfesten Volumen V enthaltene Masse ist

$$M(t) = \int_V \rho(\vec{r}, t) d^3r \quad (1.21)$$

Die durch ein orientiertes Flächenelement $d\vec{F}$ strömende Masse ist $\rho(\vec{r})\vec{v}(\vec{r}) \cdot d\vec{F}$ pro Zeiteinheit. Im Volumen V wird Masse weder erzeugt noch vernichtet. Deshalb bedeutet eine Massenänderung einen Fluss durch die Oberfläche.

$$\frac{dM}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \rho d^3r = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} d^3r = - \int_{F(V)} \rho(\vec{r}, t) \vec{v}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{F} \quad (1.22)$$

$$\text{Gaußscher Satz} \rightarrow \int_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) \right) d^3r = 0 \quad (1.23)$$

Da das Volumen beliebig gewählt werden kann, muss der Integrand verschwinden.

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \rho \vec{v} = 0} \quad \text{Kontinuitätsgleichung (diff. Form der Massenerhaltung)} \quad (1.24)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \rho \vec{v} = \nabla_i \rho v_i = v_i \nabla_i \rho + \rho \nabla_i v_i = \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \rho + \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{v} \quad (1.25)$$

Zusammen mit der substantiellen Zeitableitung $d_t A = \partial_t A + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} A$ erhält man

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \quad (1.26)$$

Für quellenfreie Strömungen, d.h. $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$ (inkompressible Strömung), gilt also $\frac{d\rho}{dt} = 0$: Die Dichte eines beliebigen Flüssigkeitselementes ist konstant! (Die Dichte im Raum ist nicht notwendigerweise homogen.)

Die allgemeine Bilanzgleichung (für Energie, Impuls, Entropie ...) lautet

$$\boxed{\frac{\partial a}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{b} = q} \quad \text{allgemeine Bilanzgleichung} \quad (1.27)$$

mit *Dichte* a , *Stromdichte* b und

$$\text{Produktionsdichte} \begin{cases} q \neq 0 & \text{wenn phys. Größe erzeugt/vernichtet wird} \\ q = 0 & \text{Bilanzgleichung} \rightarrow \text{Erhaltungssatz} \end{cases}$$

1.3 Bilanzgleichungen

1.3.1 Impulserhaltung - Spannungstensor

Impulsdichte: $\rho \vec{v}$

Impulsstromdichte (i-te Komponente): $\rho v_i \cdot \vec{v}$

Impulsbilanz (i-te Komponente, für Flüssigkeiten und elastische Körper):

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho v_i d^3r + \oint_{F(V)} \rho v_i \vec{v} \cdot d\vec{F} = \int_V \rho F_i d^3r + \oint_{F(V)} P_i^{(\hat{n})} dF \quad (1.28)$$

\vec{F} spezifische (=pro Masse) *Volumenkraft*; z.B. Erdbeschleunigung $\vec{F} = g\hat{e}$

$\vec{P}^{(\hat{n})}$ von lokaler Flächennormale \hat{n} abhängige Spannung \equiv *Oberflächenkraft*

Im deformierten Körper greifen außer Volumenkraften auch die durch die Wechselwirkungen zwischen den Teilchen verursachten Flächenkräfte an.

Beispiel: *Deformierte Gummihaut*

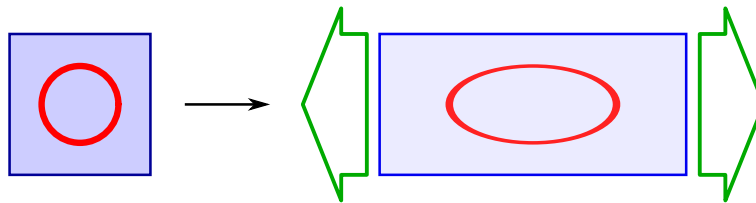


Abbildung 1.5: Deformation einer markierten Gummihaut

Wenn man das markierte Stück im deformierten Zustand ausschneidet, muss man am Rand ziehen, um es in der elliptischen Form zu halten. Die Spannung $\vec{P}^{(\hat{n})}$ hängt von der lokalen Richtung des Schnitts ab!

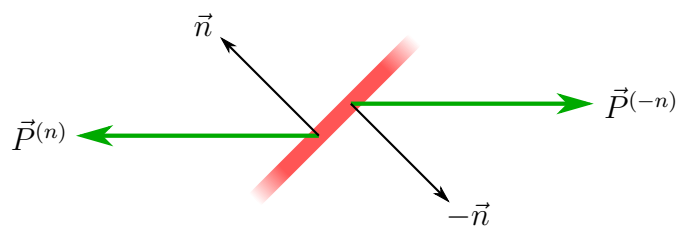


Abbildung 1.6: Kleine Schnittfläche im Inneren des deformierten Körpers mit den an ihr angreifenden Spannungsvektoren $\vec{P}^{(n)}$ und $\vec{P}^{(-n)}$; n ist der Normaleneinheitsvektor.

Normalspannung: $(\hat{n} \cdot \vec{P}^{(\hat{n})}) \hat{n}$

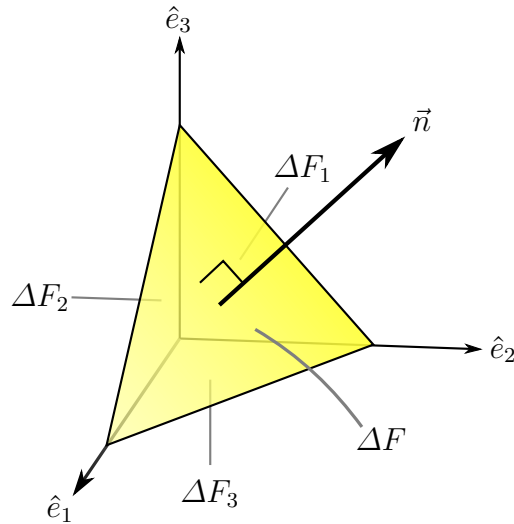
Tangentialspannung: $\vec{P}^{(\hat{n})} - \hat{n} (\hat{n} \cdot \vec{P}^{(\hat{n})})$

Aber wie hängt die Spannung $\vec{P}^{(\hat{n})}$ von \hat{n} ab?

Dazu betrachte den statischen Fall ($\vec{v} = 0$) ohne Volumenkraften ($\vec{F} = 0$)

$$\oint_{F(V)} \vec{P}^{(\hat{n})} dF = 0 \quad (1.29)$$

Betrachte das Oberflächenintegral über einen allgemeinen Tetraeder. Dazu projiziert man das Flächenelement ΔF auf die zu den Achsen senkrechten Flächen.



Es gilt $\Delta F_i = \Delta F \cdot n_i$

$$\Rightarrow \vec{P}^{(\hat{n})} \Delta F + \vec{P}^{(-\hat{e}_1)} \Delta F n_1 + \vec{P}^{(-\hat{e}_2)} \Delta F n_2 + \vec{P}^{(-\hat{e}_3)} \Delta F n_3 = 0 \quad (1.30)$$

und wegen $\vec{P}^{(\hat{n})} = -\vec{P}^{(-\hat{n})}$

$$\Delta F \left(\vec{P}^{(\hat{n})} - \vec{P}^{(\hat{e}_1)} n_1 - \vec{P}^{(\hat{e}_2)} n_2 - \vec{P}^{(\hat{e}_3)} n_3 \right) = 0 \quad (1.31)$$

Da dies für beliebige Flächen ΔF gilt, folgt

$$P_i^{(\hat{n})} = P_i^j n_j = \sigma_{ij} n_j \quad (1.32)$$

$\sigma_{ij} n_j$ ist die i -te Komponente der Spannung auf die Fläche senkrecht zu \hat{n} .

Kennt man die drei Spannungsvektoren \vec{P}_1, \vec{P}_2 und \vec{P}_3 , kann man jeden Spannungsvektor berechnen! Die Spannung $\vec{P}^{\hat{n}}$ hängt linear von den Normalkomponenten n_j ab. \vec{P} und \hat{n} sind Vektoren, σ_{ij} ist also ein Tensor 2. Stufe.

Bedeutung der Tensorelemente:

σ_{11} ist eine in 1-Richtung wirkende Kraft auf ein zu 1 senkrechtes Flächenelement ($\hat{=}$ Normalspannung).

σ_{12} ist eine in 1-Richtung wirkende Kraft auf ein zu 2 senkrechtes Flächenelement ($\hat{=}$ Tangentialspannung).

Einsetzen in die Impulsbilanz:

$$\oint_{F(V)} \vec{P}_i^{\hat{n}} dF = \oint_{F(V)} \sigma_{ij} n_j dF = \oint_{F(V)} \sigma_{ij} dF_j = \int_V \nabla_j \sigma_{ij} dV \quad (1.33)$$

Im letzten Schritt wurde der Satz von Gauß benutzt. Daraus folgt nun:

$$\frac{d}{dt} \int \rho v_i d^3r + \oint_{F(V)} \rho v_i \vec{v} \cdot d\vec{F} = \int_V \left(\frac{\partial}{\partial t} \rho v_i + \nabla_j \rho v_i v_j \right) d^3r = \int_V (\rho F_i + \nabla_j \sigma_{ij}) d^3r \quad (1.34)$$

Auch hier wurde im zweiten Schritt der Satz von Gauß angewandt. Hiermit folgt

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} \rho v_i + \nabla_j (\rho v_i v_j) = \rho F_i + \nabla_j \sigma_{ij}} \quad \text{diff. Form der Impulserhaltung} \quad (1.35)$$

$$\boxed{\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \rho v_i}_{\text{Impulsdichte}} + \nabla_j \underbrace{(\rho v_i v_j - \sigma_{ij})}_{\text{Impulsstromdichte}} = \underbrace{\rho F_i}_{\text{Produktionsterm}}} \quad (1.36)$$

Umformung:

$$\rho \dot{v}_i + \underbrace{v_i \dot{\rho} + v_i \nabla_j \rho v_j}_{=0 \text{ (Kontinuitätsgl.)}} + \rho v_j \nabla_j v_i = \boxed{\rho \frac{dv_i}{dt} = \rho F_i + \nabla_j \sigma_{ij}} \quad \text{Impulserhaltung} \quad (1.37)$$

Der konvektive Teil der Impulsstromdichte ist $\rho v_i v_j$. Dies entspricht der Impulsdichte ρv_i eines Volumenelementes welches sich mit Geschwindigkeit v_j bewegt.

$-\sigma_{ij}$ ist die Impulsstromdichte durch Oberflächenkräfte.

In ((1.37)) kommt der konvektive Teil nicht vor, da sich die substantielle Zeitableitung auf ein mitbewegtes Flüssigkeitselement bezieht.

Die Impulsbilanz ist die Basis für die gesamte Kontinuumsmechanik!

In elastischen Körpern ist σ_{ij} auch im statischen Fall wichtig. Bei Flüssigkeiten wird im statischen Fall ($\vec{v} = 0$) aus σ_{ij} der isotrope Druck:

$$\boxed{\sigma_{ij} = -p \delta_{ik} + R_{ik}} \quad (1.38)$$

Der Reibungsspannungstensor R_{ik} verschwindet im statischen Fall. Mit

$$P_i^{(\hat{n})} = \sigma_{ik} n_k = (-p \delta_{ik} + R_{ik}) n_k = -p n_i + R_{ik} n_k \quad (1.39)$$

gilt dann im statischen Fall ($R_{ik} = 0$):

$$\vec{P}_i^{(\hat{n})} = -p \hat{n} \quad (1.40)$$

Die Spannung hat dann nur eine Normalkomponente und steht senkrecht zum Oberflächenelement. Außerdem ist $\vec{P}_i^{(\hat{n})}$ isotrop, also $|\vec{P}_i^{(\hat{n})}| = p$ unabhängig von \hat{n} . Im statischen, fluiden Fall wird aus der Impulsbilanzgleichung:

$$\rho F_i = -\nabla_k \sigma_{ik} = \nabla_k p \delta_{ik} = \nabla_i p \quad (1.41)$$

$$\boxed{\rho \vec{F} = -\vec{\nabla} p} \quad \text{Grundgleichung der Hydrostatik} \quad (1.42)$$

Aus der Kraftdichte kann somit die Druckverteilung berechnet werden.

Beispiel: *Erdatmosphäre*

$$-\rho(z)g = \frac{dp(z)}{dz} \quad (1.43)$$

mit $g \approx 9,81 \frac{m}{s^2}$ als Erdbeschleunigung. Integration liefert:

$$p(\infty) - p(z) = -g \int_z^\infty dz' \rho(z') \quad (1.44)$$

$$p_0 = p(0) = g \int_0^\infty dz \rho(z) \quad (1.45)$$

Druck an der Erdoberfläche ist also proportional zum Atmosphärgewicht pro Oberfläche. Gewicht der Atmosphäre: $5 \cdot 10^{18}$ kg; Erdoberfläche: $500 \cdot 10^{12}$ m²

$$\Rightarrow p_0 = \overbrace{10}^{\approx g} \cdot \frac{5 \cdot 10^{18} \text{ kg}}{5 \cdot 10^{14} \text{ m s}^2} = 10^5 \text{ Pa} = 1 \text{ bar} \quad (1.46)$$

$$[p] = \frac{\text{kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{\text{m}^2} = \frac{\text{kg}}{\text{m s}^2} = \text{Pa} \quad (1.47)$$

1.3.2 Energiebilanzgleichungen

Impulsbilanz:

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = \rho F_i + \nabla_j \sigma_{ij} = \frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) + \nabla_j \rho v_i v_j \quad (1.48)$$

Multipliziere mit v_i :

$$v_i \rho \frac{dv_i}{dt} = \rho v_i F_i + v_i \nabla_j \sigma_{ij} \quad (1.49)$$

Weitere Identität:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial t} \rho v_i v_i + \nabla_j \rho v_j v_i v_i \right) \\
 &= v_i \dot{v}_i \rho + \underbrace{\frac{1}{2} v_i v_i \dot{\rho}}_{=0 \text{ wg. Kontinuitätsgl.}} + \underbrace{\frac{1}{2} v_i v_i \nabla_j \rho v_j}_{=\rho v_j v_i \nabla_j v_i} + \frac{1}{2} \rho v_j \nabla_j v_i v_i \\
 &= v_i \rho \left(\dot{v}_i + v_j \nabla_j v_i \right) \\
 &= v_i \rho \frac{dv_i}{dt}
 \end{aligned} \tag{1.50}$$

Mit folgender Gleichung

$$v_i \nabla_j \sigma_{ij} = \nabla_j v_i \sigma_{ij} - \sigma_{ij} \nabla_j v_i \tag{1.51}$$

erhält man nun die **Bilanzgleichung für die kinetische Energie**:

$$\boxed{
 \begin{aligned}
 \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 \right)}_{\substack{\text{kinetische} \\ \text{Energie}}} &= + \nabla_j \underbrace{\left(\frac{1}{2} \rho v^2 v_j - v_i \sigma_{ij} \right)}_{\substack{\text{Energiestromdichte} \\ \text{(Poynting-Vektor)}}} = \underbrace{-\sigma_{ij} \nabla_j v_i + \rho v_i F_i}_{\substack{\text{Leistungsdichte} \\ \text{(durch Spannungen und Volumekräfte)}}}
 \end{aligned}
 } \tag{1.52}$$

$\frac{1}{2} \rho v^2 v_j$ konvektiver Anteil (proportional zu ρv^2)
 $v_i \sigma_{ij}$ durch Spannung übertragene Energiedichte

Besitzt die äußere Kraft ein Potential, $F_i = -\nabla_i U(r, t)$, dann folgt (im zweiten Schritt wird die Kontinuitätsgleichung verwendet):

$$\begin{aligned}
 \rho v_i F_i &= -\rho v_i \nabla_i U \\
 &= -\nabla_i \rho v_i U + U \nabla_i \rho v_i \\
 &= -\nabla_i \rho v_i U - U \frac{\partial \rho}{\partial t} \\
 &= -\nabla_i v_i U - \frac{\partial \rho}{\partial t} U + \rho \frac{\partial U}{\partial t}
 \end{aligned} \tag{1.53}$$

Damit erhält man die **Bilanzgleichung für die Gesamtenergie**:

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho U \right)}_{\substack{\text{kinetische + potentielle} \\ \text{Energiedichte}}} + \nabla_j \left[\underbrace{\left(\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho U \right) v_j}_{\substack{\text{kinetische + potentielle} \\ \text{Energiekonvektion}}} - v_i \sigma_{ij} \right] = -\sigma_{ij} \nabla_j v_i + \underbrace{\rho \frac{\partial U}{\partial t}}_{\substack{\text{Leistungsdichte} \\ \text{durch äußeres Feld}}} \tag{1.54}$$

1.3.3 Drehimpulsbilanz (\rightarrow Spannungstensor ist symmetrisch)

Aus der Impulsbilanz

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) + \nabla_j(\rho v_i v_j - \sigma_{ij}) = \rho F_i \quad (1.55)$$

erhält man mit der Definition der Drehmoment-Dichte

$$\begin{aligned} \vec{M} = \vec{r} \times \rho \vec{F} &\Rightarrow M_l = \varepsilon_{lki} r_k \rho F_i \\ (M_1 = r_2 \rho F_3 - r_3 \rho F_2) \end{aligned} \quad (1.56)$$

durch Multiplikation mit $\varepsilon_{lki} r_k$ die Gleichung

$$\varepsilon_{lki} r_k \frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) + \varepsilon_{lki} r_k \nabla_j(\rho v_i v_j - \sigma_{ij}) = M_l \quad (1.57)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{(\varepsilon_{lki} r_k \rho v_i)}_{\substack{\vec{r} \times \rho \vec{v} \\ \text{Drehimpulsdichte}}} + \nabla_j \underbrace{[\varepsilon_{lki} r_k (\rho v_i v_j - \sigma_{ij})]}_{\text{Drehimpulsstromdichte}} \\ = M_l + \underbrace{\varepsilon_{lki} \rho v_i \frac{\partial}{\partial t} r_k}_{\substack{\rho \varepsilon_{lki} v_i v_k \\ \rightarrow \vec{v} \times \vec{v} = 0}} + \varepsilon_{lki} (\rho v_i v_j - \sigma_{ij}) \nabla_j r_k \end{aligned} \quad (1.58)$$

Wenn keine externen Volumenkräfte \vec{F} angreifen, ist $\vec{M} = 0$ und der Drehimpuls sollte erhalten bleiben, also muss die linke Seite verschwinden. Außerdem gilt:

$$\nabla_j r_k = \frac{\partial r_k}{\partial r_j} = \delta_{jk} \quad (1.59)$$

$$\Rightarrow \varepsilon_{lki} (\rho v_i v_j - \sigma_{ij}) \underbrace{\nabla_j r_k}_{=\delta_{jk}} = \varepsilon_{lki} (\rho v_i v_k - \sigma_{ik}) = 0 \quad (1.60)$$

$$\varepsilon_{lki} \rho v_i v_k \hat{=} \rho \vec{v} \times \vec{v} = 0 \quad (1.61)$$

Also muss gelten:

$$\boxed{\varepsilon_{lki} \sigma_{ik} = 0} \quad (1.62)$$

Oder: $\sigma_{ik} = \sigma_{ki} \Rightarrow$ Der Spannungstensor ist symmetrisch.

Damit folgt für die **Drehimpulsbilanzgleichung**:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_{lki} r_k \rho v_i) + \nabla_j[\varepsilon_{lki} r_k (\rho v_i v_j - \sigma_{ij})] = M_l \quad (1.63)$$

2 Hydrodynamik

2.1 Viskosität und Reibungstensor

Im Folgenden werden Flüssigkeiten und Gase betrachtet.

Im statischen Fall ($\vec{v} = 0$) ist σ_{ij} isotrop: $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}$
Impulserhaltung:

$$0 = \rho \frac{dv_i}{dt} = \rho F_i + \nabla_i \sigma_{ij} = \rho F_i - \nabla_i p \quad (2.1)$$

Im Allgemeinen gibt es Reibungseffekte:

$$\Rightarrow \sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + R_{ij} \quad (2.2)$$

Der Reibungstensor R_{ij} kann nur von Geschwindigkeiten abhängen (Translations-Invarianz) (da R_{ij} im statischen Fall, $\vec{v} = 0$, verschwindet).

1. Bei einer homogenen Translation gibt es keine inneren Reibungseffekte. R_{ij} kann also nur von Ableitungen von \vec{v} abhängen. Bei kleinen Geschwindigkeiten \vec{v} werden nur die ersten Ableitungen $\nabla_k v_l$ wichtig sein (und $\nabla_j \nabla_k v_l \dots \approx 0$).
2. Für gleichförmige Rotation mit $\vec{v} = \vec{\omega}^{(0)} \times \vec{r}$ gibt es keine inneren Reibungseffekte:

$$v_k = \varepsilon_{ijk} \omega_l^{(0)} r_m \quad (2.3)$$

Nur Ableitungen sind wichtig:

$$\nabla_j v_k = \varepsilon_{klm} \omega_l^{(0)} \nabla_j r_m = \varepsilon_{klm} \omega_l^{(0)} \delta_{jm} = \varepsilon_{klj} \omega_l^{(0)} \quad (2.4)$$

Idee:

Der Reibungstensor muss verschwinden, also konstruiert man Linearkombinationen die gleich Null sind!

$$V_{jk} = \frac{1}{2} (\nabla_j v_k + \nabla_k v_j) = \omega_l^{(0)} \frac{1}{2} (\varepsilon_{klj} + \varepsilon_{jlk}) = 0 \quad (2.5)$$

V_{jk} ist der Tensor der Deformationsgeschwindigkeit (V_{jk} ist symmetrisch).

Allgemeiner Zusammenhang zwischen R_{ij} und V_{ij} (hier nur lineare Näherung):

$$R_{ij} = C_{ijkl}V_{kl} + \mathcal{O}(V^2) \quad (C_{ijkl} \text{ ist ein Tensor 4. Stufe}) \quad (2.6)$$

Für isotrope Flüssigkeiten:

$$C_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu\delta_{ik}\delta_{jl} + \nu\delta_{il}\delta_{jk} \quad (2.7)$$

Da V_{kl} symmetrisch ist, gilt $\mu = \nu$.

$$\Rightarrow C_{ijkl} = \eta'\delta_{ij}\delta_{kl} + 2\eta\delta_{ik}\delta_{jl} \quad (2.8)$$

Und somit:

$$\boxed{R_{ij} = 2\eta V_{ij} + \eta'\delta_{ij}V_{ll}} \quad (2.9)$$

$$\boxed{R_{ij} = \eta(\nabla_i v_j + \nabla_j v_i) + \eta'\delta_{ij}\nabla_l v_l} \quad (2.10)$$

η, η' : Viskositätskoeffizienten η' : „Zweite Viskosität“ $[\eta] = \text{Pa} \cdot \text{s}$

Zwei skalare Parameter (η, η') bestimmen das viskose Verhalten von Flüssigkeiten (\cong Reibungskräfte) im isotropen Fall.

Wenn η unabhängig von \vec{v} ist, bezeichnet man die Flüssigkeit als „Newtonsche Flüssigkeit“ (\cong Spannungstensor ist linear abhängig von \vec{v}).

Bilde die Spur des Spannungstensors:

$$\begin{aligned} R_{ii} &= 2\eta V_{ii} + \eta'\delta_{ii}V_{ll} \\ &= (2\eta + 3\eta')V_{ii} \\ &\equiv -3p' \end{aligned} \quad (2.11)$$

p' ist der Reibungsdruck

$$\begin{aligned} \Rightarrow p' &= -\left(\frac{2}{3}\eta + \eta'\right)V_{ll} \\ &= -\left(\frac{2}{3}\eta + \eta'\right)\nabla_l v_l \\ &\equiv -J\nabla_l v_l \end{aligned} \quad (2.12)$$

Bei Volumenänderung tritt also ein Reibungsdruck proportional zu $\nabla_l v_l$ auf. Volumenviskosität ist meist vernachlässigbar:

$$J = \frac{2}{3}\eta + \eta' \cong 0 \quad (2.13)$$

$$\Rightarrow \boxed{\eta' \approx -\frac{2}{3}\eta} \quad \text{Stokes-Beziehung} \quad (2.14)$$

$\eta = \eta' = 0 \Leftrightarrow$ Ideale Flüssigkeit

$\eta, \eta' \neq 0 \Leftrightarrow$ Viskose Flüssigkeit

	H ₂ O	Olivenöl	Glycerin	Luft
η [Pa s]	10^{-3}	10^{-1}	1	10^{-5}

Beispiel: *Einfache Scherströmung (ebene Couette-Strömung)*

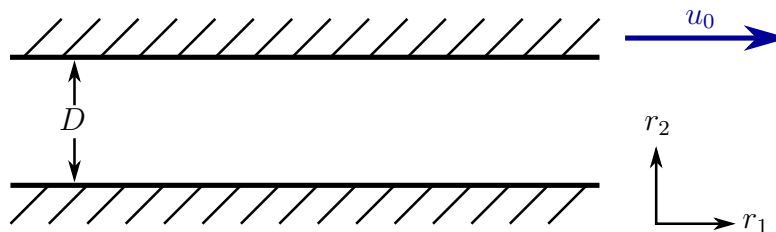


Abbildung 2.1: Die untere Platte ruht, die obere Platte bewegt sich mit der Geschwindigkeit u_0 nach rechts. Die Flüssigkeit „haftet“ an den Platten und ist stationär ($\dot{v}_i = 0$, $\dot{\rho} = 0$)

Impulsbilanz (ohne äußere Kräfte: $\rho F_i = 0$):

$$\begin{aligned} \rho \frac{dv_i}{dt} &= \overbrace{\rho F_i}^{=0} + \nabla_i \sigma_{ij} \\ &= \nabla_i \left[-p \delta_{ij} + \eta (\nabla_i v_j + \nabla_j v_i) + \eta' \delta_{ij} \nabla_l v_l \right] \\ &= \rho (\dot{v}_i + v_j \nabla_j v_i) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (2.15)$$

In der vorletzten Zeile verschwindet der erste Term, da die Strömung stationär ist, der zweite Term verschwindet, da $v_1(r_2)$ die einzige Geschwindigkeitskomponente $\neq 0$ ist.

Wegen der Translationsinvarianz bezüglich r_1 und r_2 folgt, dass \vec{v} nur von r_2 abhängt. Nur $v_1 \neq 0$.

Beweis:

Kontinuitätsgleichung:

$$\dot{\rho} + \nabla_i \rho v_i = 0 \quad (2.16)$$

$$\text{wegen Stationarität gilt } \dot{\rho} = 0 \quad \Rightarrow \nabla_i \rho v_i = 0 \quad (2.17)$$

Betrachte die Differenz der Flüsse durch laterale Flächen F_0 (liegt auf Höhe $r_2 = z$) und F_D ($r_2 = D$) im stationären Fall (deswegen $\dots = 0$):

$$F_0 [\rho(D)v_2(D) - \rho(z)v_2(z)] = 0 \quad (2.18)$$

Da die Wand impermeabel ist, gilt $v_2(D) = 0$, also $v_2(z) = 0$ für alle z !

Einzigste Komponente: $v_1(r_2)$

$$\Rightarrow v_j \nabla_j v_i = 0 \quad (2.19)$$

$$\Rightarrow \rho \left(\underbrace{\dot{v}_i}_{=0} + v_j \nabla_j v_i \right) = 0 \quad (2.20)$$

\dot{v}_i verschwindet aufgrund der Stationarität. Mit $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + R_{ij}$ folgt also:

$$\begin{aligned} \rho \left(\dot{v}_i + v_j \nabla_j v_i \right) &= 0 \\ &= \nabla_j \left[-p\delta_{ij} + \eta \left(\nabla_i v_j + \nabla_j v_i \right) + \eta' \delta_{ij} \underbrace{\nabla_l v_l}_{=0} \right] \end{aligned} \quad (2.21)$$

Wie oben gezeigt, gilt wegen Translationsinvarianz $v_1(r_2) \neq 0$ und $v_2 = v_3 = 0$. Damit ist aber $\nabla_l v_l = 0$ und auch $v_j \nabla_j v_i = 0$.

$$\Rightarrow 0 = -\nabla_i p + \eta \left(\nabla_j \nabla_i v_j + \nabla_j \nabla_j v_i \right) \quad (2.22)$$

Die einzelnen Komponenten sind wie folgt:

- $i = 1$

$$0 = -\nabla_1 p + \eta \left(\nabla_2^2 v_1 + \underbrace{\nabla_3^2 v_1}_{=0} + \underbrace{\nabla_1^2 v_1}_{=0} \right) \quad (2.23)$$

$\nabla_1 p$ verschwindet wegen der Translationsinvarianz.

$$\Rightarrow \boxed{\eta \nabla_2^2 v_1(r_2) = 0} \quad (2.24)$$

- $i = 2$

$$0 = -\nabla_2 p + \eta \left(\nabla_2 \underbrace{\nabla_j v_j}_{=0} + \underbrace{\nabla_j^2 v_2}_{=0} \right) \quad (2.25)$$

$$\Rightarrow \nabla_2 p = 0 \quad \Rightarrow p(r_2) = p_0 = \text{konst.} \quad (2.26)$$

Randbedingung:

Flüssigkeit „haftet“ an den Platten $\hat{=}$ Haftbedingung („no-slip“) (gut für zähe Flüssigkeiten, $\eta \neq 0$, erfüllt):

$$\eta \nabla_2^2 v_1(r_2) = 0 \quad (2.27)$$

$$\boxed{v_1(r_2) = u_0 \frac{r_2}{D}} \quad (2.28)$$

$$\Rightarrow \sigma_{ij} = \begin{pmatrix} -p_0 & \eta \frac{u_0}{D} & 0 \\ \eta \frac{u_0}{D} & -p_0 & 0 \\ 0 & 0 & -p_0 \end{pmatrix} \quad (2.29)$$

- σ_{12} : Tangentialkraft in 1-Richtung auf Fläche $\perp 2$, konstant im gesamten Volumen
- σ_{21} : Tangentialkraft in 2-Richtung auf Fläche $\perp 1$, konstant im gesamten Volumen

Beispiel:

$$u_0 = 1 \frac{m}{s}; D = 1m$$

Für Wasser ($\eta \approx 10^{-3} \text{ Pa s}$): $\sigma_{12} = 10^{-3} \text{ Pa}$

Die Tangentialspannung ist also 10^8 mal kleiner als der Atmosphärendruck p_0 ($\approx 10^5 \text{ Pa}$).

2.2 Grundgleichungen der Hydrodynamik

(Navier-Stokes-Gleichung, Euler-Gleichung)

Impulsbilanz:

$$\begin{aligned}\rho \frac{dv_i}{dt} &= \rho F_i + \nabla_j \sigma_{ij} \\ &= \rho F_i - \nabla_i p + \nabla_j R_{ij}\end{aligned}\tag{2.30}$$

Kontinuitätsgleichung:

$$\dot{\rho} + \nabla_i (\rho v_i) = 0\tag{2.31}$$

Zustandsgleichung:

$$p = p(\rho, T, \dots)\tag{2.32}$$

$$\text{(z.B. ideale Gasgleichung: } p = \frac{N}{V} k_b T = \rho k_b T)\tag{2.33}$$

Reibungsgesetz:

$$R_{ij} = \eta (\nabla_j v_i + \nabla_i v_j) + \eta' \delta_{ij} \nabla_k v_k\tag{2.34}$$

+ Randbedingung (z.B. $\vec{v} = 0$ an starrer Wand).

Reibungsgesetz in Impulsbilanz einsetzen:

$$\boxed{\rho \frac{dv_i}{dt} = \rho F_i - \nabla_i p + \eta \nabla_j \nabla_j v_i + (\eta + \eta') \nabla_i \nabla_j v_j} \quad \text{Navier-Stokes-Gleichung} \quad (2.35)$$

$$\hat{=} \rho \left[\dot{\vec{v}} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right] = \rho \vec{F} - \vec{\nabla} p + \eta \Delta \vec{v} + (\eta + \eta') \vec{\nabla} \vec{\nabla} \cdot \vec{v} \quad (2.36)$$

Mit Stokes-Beziehung ($\eta' = -\frac{2}{3}\eta$); Stokes: 1845:

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = \rho F_i - \nabla_i p + \eta \nabla_j \nabla_j v_i + \frac{1}{3} \eta \nabla_i \nabla_j v_j \quad (2.37)$$

Diese Gleichung ist im Allgemeinen unlösbar, da $\dot{v}_i + v_k \nabla_k v_i$ nicht linear ist!

- Inkompressible Flüssigkeiten:

Kontinuitätsgleichung:

$$\dot{\rho} + \nabla_i \rho v_i = 0 = \frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla_i v_i \quad (2.38)$$

Inkompressibilität $\hat{=} \frac{d\rho}{dt} = 0 \Leftrightarrow \nabla_i v_i = 0$

Damit folgt die **Inkompressible Navier-Stokes-Gleichung** (1827):

$$\boxed{\rho \frac{dv_i}{dt} = \rho F_i - \nabla_i p + \eta \nabla_j \nabla_j v_i} \quad (2.39)$$

- Reibungsfreie Flüssigkeiten:

Für reibungsfreie, inkompressible Flüssigkeiten ($\hat{=} \text{ideale Flüssigkeiten}$) gilt zusätzlich $\eta = \eta' = 0$. Daraus ergibt sich die **Euler-Gleichung**:

$$\boxed{\rho \frac{dv_i}{dt} = \rho F_i - \nabla_i p} \quad (2.40)$$

Reformulierung der Euler-Gleichung:

$$\vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v}) = \frac{1}{2} \vec{\nabla} v^2 - \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \vec{v} \quad (2.41)$$

oder:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ijk} v_k \varepsilon_{klm} \nabla_l v_m &= v_j \nabla_i v_j - v_j \nabla_j v_i \\ &= \frac{1}{2} \nabla_i v_j v_j - v_j \nabla_j v_i \end{aligned} \quad (2.42)$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \rho (\dot{v}_i + v_l \nabla_l v_i) \\ &= \rho \dot{v}_i + \frac{1}{2} \rho \vec{\nabla} v^2 - \rho \vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v}) = \rho \vec{F} - \vec{\nabla} p \hat{=} \text{Euler-Gleichung} \end{aligned} \quad (2.43)$$

2.3 Bernoulli-Gleichung

Im Folgendem werden nur wirbelfreie Strömungen betrachtet ($\vec{\nabla} \times \vec{v} = 0 \rightarrow \vec{v} = \vec{\nabla}\Phi$).

Außerdem soll gelten: $\vec{F} = -\vec{\nabla}U$

Einführung der Druckfunktion:

$$\Pi(p) = \int_0^p \frac{dp'}{\rho(p')} \quad (2.44)$$

Damit lässt sich folgendes einfach schreiben:

$$\nabla_i \Pi = \frac{d\Pi}{dp} \frac{\partial p}{\partial r_i} = \frac{1}{\rho} \nabla_i p \quad (2.45)$$

Durch Teilen der Euler-Gleichung durch ρ erhält man:

$$\begin{aligned} 0 &= \dot{v} + \frac{1}{2} \vec{\nabla} v^2 - \vec{F} + \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p \\ &= \vec{\nabla} \left(\dot{\Phi} + \frac{1}{2} v^2 + U + \Pi \right) \end{aligned} \quad (2.46)$$

Daraus folgt die **Bernoulli-Gleichung**:

$$\boxed{\dot{\Phi} + \frac{1}{2} v^2 + U + \Pi = \text{konst.}(t)} \quad (2.47)$$

Die Funktion ist also konstant im gesamten Raumgebiet! Die Konstante kann von der Zeit abhängen, aber nicht vom Ort.

Kommentar zur Druckfunktion:

Ideales Gas: $pV = Nk_bT \Rightarrow \frac{N}{V} = \rho = p/k_bT$

Idee: $\rho(p) \hat{=}$ Zustandsgleichung, die nicht explizit vom Ort \vec{r} abhängt $\rightarrow \rho(p(\vec{r}, t), \vec{r}, t)$

Für inkompressible Flüssigkeiten gilt: $\rho(r, t) = \rho_0 \rightarrow \Pi = \frac{p}{\rho_0}$

Mit einem stationären Strömungsprofil ($\dot{\Phi} = 0$) folgt: $\frac{\rho_0}{2} v^2 + p + \rho_0 U = \text{konst.}$ Ohne Volumenkräfte ergibt sich daraus:

$$\boxed{\frac{\rho_0}{2} v^2(r) + p(r) = \text{konst.}} \quad (2.48)$$

In einer ruhenden Flüssigkeit ($v = 0$) gilt:

$$c = p_0 \quad (2.49)$$

c entspricht dem **hydrostatischen Druck**.

Im Allgemeinen ($v \neq 0$) ist $c = p_0$ der **Gesamtdruck**, p ist der **hydrostatische Druck** und $\frac{\rho_0}{2} v^2(r)$ heißt Staudruck.

Bernoulli für Wirbelströmungen:
Euler-Gleichung:

$$\rho \dot{\vec{v}} + \frac{\rho}{2} \vec{\nabla} v^2 - \rho \vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v}) = \rho \vec{F} - \vec{\nabla} p \quad (2.50)$$

Der erste Summand fällt aufgrund der Stationarität weg.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \vec{\nabla} v^2 - \vec{F} + \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p - \vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v}) &= 0 \\ \vec{\nabla} \left(\frac{1}{2} v^2 + U + \Pi \right) - \vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v}) &= 0 \end{aligned} \quad (2.51)$$

Nun integriere entlang einer Stromlinie.

$$\int_C \left[\vec{\nabla} \left(\frac{v^2}{2} + U + \Pi \right) - \vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \right] d\vec{r} = 0 \quad (2.52)$$

Auf einer Stromlinie gilt:

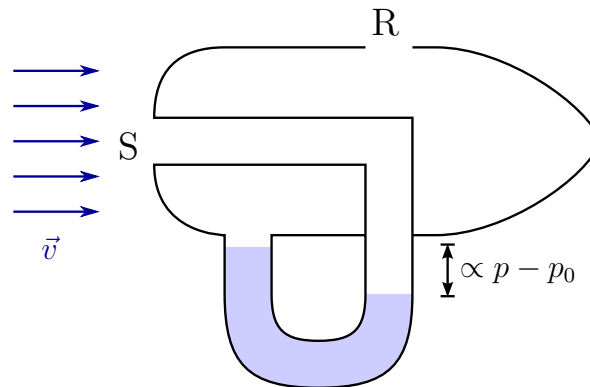
$$\begin{aligned} d\vec{r} &\parallel \vec{r}(r) \\ &\Rightarrow \vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \perp d\vec{r} \\ &\Rightarrow \int \left[\dots + \underbrace{\vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v})}_{=0} \right] d\vec{r} \end{aligned} \quad (2.53)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} v^2 + U + \Pi = C \quad (2.54)$$

wobei C nur auf einer Stromlinie konstant ist! Wegen der Stationarität ist C unabhängig von der Zeit.

Anwendungen der Bernoulli-Gleichung

1 Prandtl'sches Staurohr



Das Prandtl'sche Staurohr wird zur Messung von Strömungsgeschwindigkeiten benutzt. Hier wird eine inkompressible, stationäre Strömung ohne äußere Kräfte betrachtet. Am Staupunkt S ist $v = 0$ und damit $p = p_0$. Am Punkt R strömt die Flüssigkeit mit $v \neq 0$, also ist dort $p < p_0$. Die Geschwindigkeit erhält man aus der Bernoulli-Gleichung:

$$\frac{\rho_0}{2} v^2 + p = p_0 \quad (2.55)$$

$$v = \sqrt{\frac{2}{\rho_0} (p_0 - p)} \quad (2.56)$$

2 Kavitation (lat. Aushöhlung)

Für $v^* = \sqrt{\frac{2p_0}{\rho}}$ wird der statische Druck $p = 0$, eine Flüssigkeit ist dann instabil.

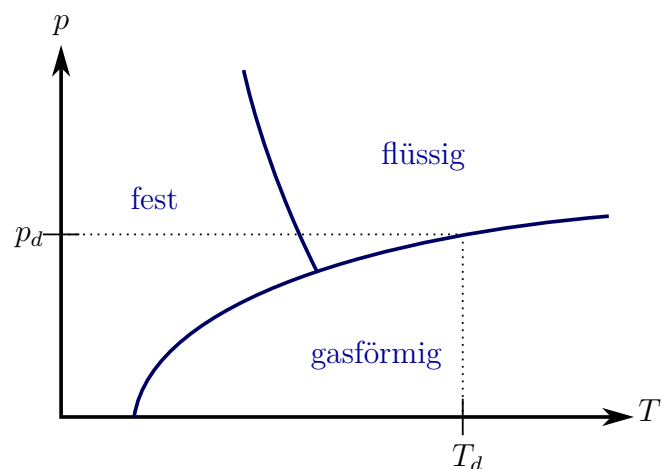
$$p_0 = 10^5 \text{ Pa} = 10^5 \frac{\text{kg}}{\text{ms}^2} \quad \text{Wasser: } \rho = 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \quad v^* \approx \sqrt{200 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}} \approx 15 \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 60 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Tatsächlich tritt Verdampfung der Flüssigkeit bereits beim temperaturabhängigen Dampfdruck p_D auf (siehe Abb. rechts).

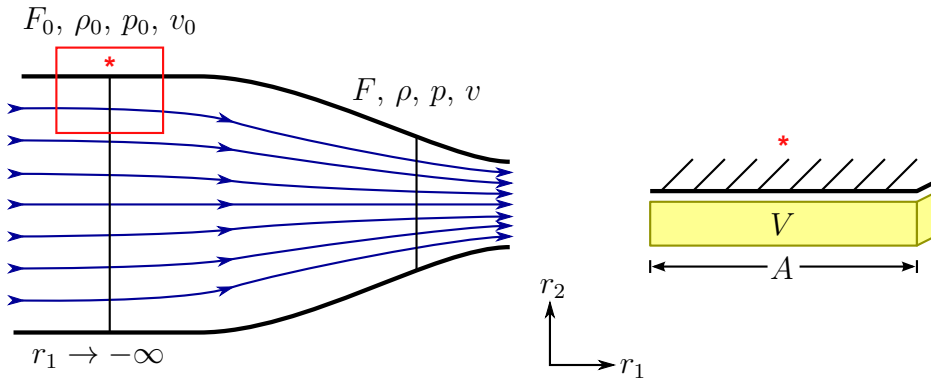
$$T = 20^\circ \text{C} \rightarrow p_D = 0,02 \text{ bar}$$

$$\Rightarrow v^* = \sqrt{\frac{2}{\rho} (p_0 - p_D)} \approx \sqrt{\frac{2}{\rho} p_0}$$

Kavitation tritt bei Propellern und Turbinenlaufrädern auf, da Dampfblasen implodieren und mechanisch belasten (Kavitationsfraß) oder laut sind (U-Boote).



3 Hugoniot-Gleichung, Lavaldüse



Betrachte 2D-Querschnitt mit variablen Durchmesser und eine ideale, stationäre Strömung ohne äußere Kräfte. Weit weg von der Verengung (z.B. $r_1 \rightarrow -\infty$) ist das Profil bezüglich r_1 konstant. Kontinuitätsgleichung (wobei $\dot{\rho} = 0$ wegen der Stationarität gilt):

$$\dot{\rho} + \vec{\nabla}(\rho\vec{v}) = \vec{\nabla}(\rho\vec{v}) = 0 \quad (2.57)$$

$$\oint_{F(V)} \rho\vec{v} \cdot \hat{n} dF = A\rho v_2(r_2) = 0 \quad (2.58)$$

Also ist $v_1(r_2)$ die einzige verbleibende Funktion (da $v_2 = 0$ an der Wand gilt).

Euler-Gleichung (mit $\dot{v}_i = 0$ aufgrund der Stationarität):

$$\rho(\dot{v}_i + \underbrace{v_l \nabla_l}_{=0} v_i) = -\nabla_i p \Rightarrow -\nabla_i p = 0 \quad (2.59)$$

nur $v_1(r_2) \neq 0$

$$\text{Der Druck ist also konstant.} \quad (2.60)$$

Bernoulli-Gleichung:

$$\dot{\Phi} + \frac{1}{2}v^2 + U + \Pi = konst. \quad (2.61)$$

$$\Pi = \int_0^p \frac{dp'}{\rho(p')} = konst. \quad (2.62)$$

Im stationären Fall gilt $\dot{\Phi} = 0$ und U, Π sind konstant. Also gilt $v^2 = konst.$ und $v_1(r_2) = konst.$ nur wenn man die Flüssigkeit weit weg von der Verengung betrachtet. Die Geschwindigkeit im Rohr ist für $r_1 \rightarrow -\infty$ konstant ($\hat{=}$ Haftbedingung nicht erfüllbar, da die Viskosität vernachlässigt wurde).

Betrachte nun den Flüssigkeitsstrom durch die Fläche F_0 und F . Aus der Kontinuitätsgleichung folgt:

$$M = F_0 \rho_0 v_0 = F \rho v \quad (2.63)$$

M entspricht der Flüssigkeitsmasse die pro Zeiteinheit durch das Rohr strömt.

(Inkompressibler Limes: $F_0 \rho_0 v_0 = F \rho_0 v = M \Rightarrow F_0 v_0 = F v = \frac{M}{\rho_0}$)

Bernoulli-Gleichung (mit $U = 0$):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (v^2 - v_0^2) &= -(\Pi(p) - \Pi(p_0)) \\ &= - \int_{p_0}^p \frac{dp'}{\rho(p')} \end{aligned} \tag{2.64}$$

differenzieren nach $p \Rightarrow \boxed{v \frac{dv}{dp} = - \frac{1}{\rho(p)}}$ (2.65)

Massenerhaltung: $F = \frac{M}{\rho v}$; $F(\rho, v)$

$$\begin{aligned} dF &= -\frac{M}{\rho v^2} dv - \frac{M}{v \rho^2} d\rho = -\frac{F}{v} dv - \frac{F}{\rho} d\rho \\ \frac{dF}{F} &= -\frac{dv}{v} \left(1 - \frac{v}{\rho} \frac{d\rho}{dv}\right) \quad \text{und} \quad \frac{d\rho(p(v))}{dv} = \frac{d\rho}{dp} \frac{dp}{dv} = -\frac{\rho v}{c^2} \\ \Rightarrow \frac{dF}{F} &= -\frac{dv}{v} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = \frac{dv}{v} \left(\frac{v^2}{c^2} - 1\right) \end{aligned} \tag{2.66}$$

Mit c als Schallgeschwindigkeit in kompressiblen Medien und der Relation $\frac{dp}{d\rho} = c^2$.

$$\boxed{\frac{dF}{F} = \frac{dv}{v} \left(\frac{v^2}{c^2} - 1\right)} \quad \text{Hugoniot-Gleichung für kompressibles Medium} \tag{2.67}$$

Für inkompressible Flüssigkeiten:

$$\frac{d\rho}{dp} = \frac{1}{c^2} = 0 \tag{2.68}$$

$$\frac{dF}{F} = -\frac{dv}{v} \tag{2.69}$$

Allerdings gilt die letzte Formel für kompressible Medien nur für Machzahlen $\frac{v}{c} \ll 1$. Um die Geschwindigkeit für $\frac{v}{c} > 1$ weiter zu erhöhen muss der Querschnitt dann also ansteigen \Rightarrow **Laval-Düse**.

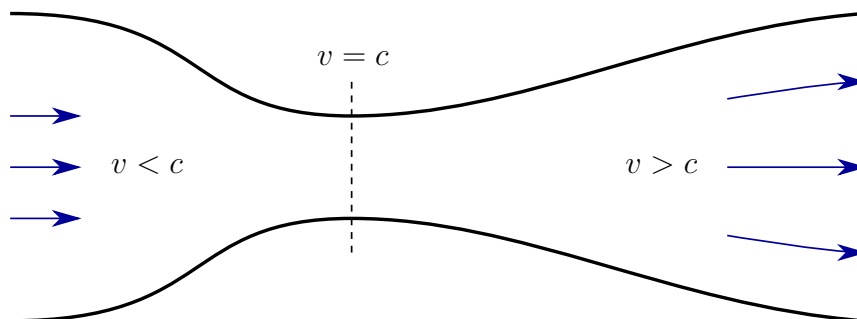
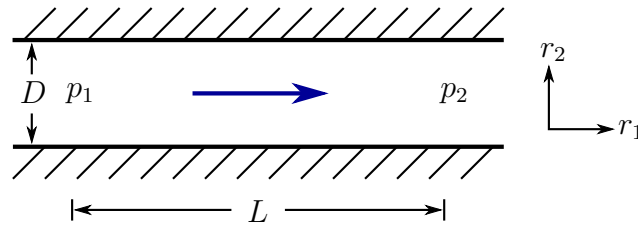


Abbildung 2.2: Schematischer Schnitt durch eine Lavaldüse

4 Planare Hagen-Poiseuille Strömung



Es wird eine inkompressible, kräftefreie ($\vec{F} = 0$), nicht ideale ($\eta \neq 0$) Flüssigkeit betrachtet. Die stationäre Strömung fließt durch einen Schlitz der Dicke D . Außerdem soll die „no-slip“-Bedingung an den Wänden gelten ($v = 0$ direkt an den Wänden).

Navier-Stokes:

$$\rho \underbrace{(\dot{v}_i + v_k \nabla_k v_i)}_{=0, \text{ stationär}} = \underbrace{\rho F_i}_{=0, \text{ kräftefrei}} - \nabla_i p + \eta (\nabla_j \nabla_j v_i) + (\eta + \underbrace{\eta'}_{=0, \text{ inkompressibel}}) \nabla_i \nabla_j v_j \quad (2.70)$$

$$\rho v_k \nabla_k v_i = -\nabla_i p + \eta (\nabla_j \nabla_j v_i + \nabla_i \nabla_j v_j) \quad (2.71)$$

Aufgrund der Symmetrie gilt $v_2 = v_3 = 0$, zudem hängt v_1 nur von r_2 ab, also $v_1(r_2)$.
 $\mathbf{i} = \mathbf{1}$:

$$0 = -\nabla_1 p + \eta \nabla_2^2 v_1(r_2) \quad \text{mit Druckgradient } \nabla_1 p = \frac{p_2 - p_1}{L}$$

Lösung der Differentialgleichung (siehe Abb. rechts):

$$v_1(r_2) = \frac{p_1 - p_2}{L\eta} \left(\frac{r_2 D}{2} - \frac{r_2^2}{2} \right)$$

Volumenfluss pro Zeit:

$$\begin{aligned} \int_0^D v_1 dr_2 &= \frac{p_1 - p_2}{\eta L} \left(\frac{D^3}{4} - \frac{D^3}{6} \right) \\ &= \frac{1}{12} \frac{p_1 - p_2}{\eta L} D^3 \end{aligned}$$

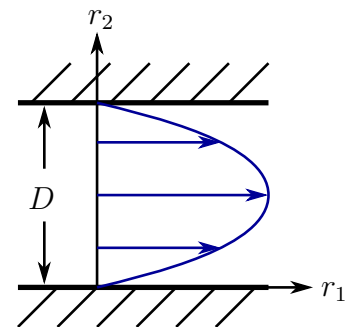


Abbildung 2.3: Geschwindigkeitsprofil der planaren Hagen-Poiseuille-Strömung

Der Strömungswiderstand wächst mit D^{-3} (für Zylinder mit D^{-4}) an.

2.4 Liftkräfte auf bewegte Körper

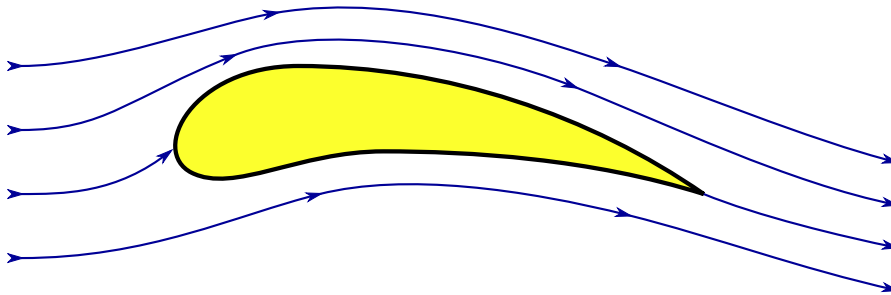


Abbildung 2.4: Strömung um einen Tragflügel im Profil. Motivation: Auftrieb eines Flugzeuges.

„Standarderklärung“: Rotationsfreie Strömung
Bernoulli-Gleichung:

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 \approx \text{konst.}$$

$$v_o > v_u \Rightarrow p_o < p_u \Rightarrow \text{Auftrieb}$$

Falsche Annahme: Fluidelemente oben und unten treffen sich nach der Tragfläche wieder.
Die richtige Erklärung erfordert Zirkulation.

2.4.1 2D-Potentialströmung

Strömungen sind besonders einfach, wenn sie quellen- ($\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$) und rotationsfrei ($\vec{\nabla} \times \vec{v} = 0$) sind.

$$\nabla\Phi = \vec{v} \quad (v_1 = \nabla_2\Phi; v_2 = \nabla_1\Phi) \quad (2.72)$$

$$\text{Quellenfrei: } \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}\Phi = \Delta\Phi = 0 \quad (\text{Laplace-Gleichung})$$

Φ heißt Geschwindigkeitspotential.

Viskosität:

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = \rho F_i - \nabla_i p + \underbrace{\eta \nabla_j \nabla_j v_i}_{=0} \quad (2.73)$$

$$= \eta \nabla_j \nabla_j \nabla_i \Phi = \eta \nabla_i \nabla_j \nabla_j \Phi = \eta \nabla_i \underbrace{\Delta\Phi}_{=0} = 0 \quad (2.74)$$

\Rightarrow Potentialströmung ist reibungsfrei (Viskosität spielt hier keine Rolle, da sie wirbelfrei ist).

Definition: **Stromfunktion** Ψ mit $v_1 = \nabla_2\Psi$ und $v_2 = -\nabla_1\Psi$

Divergenz (quellenfrei):

$$\begin{aligned} \nabla_k v_k &= \nabla_1 v_1 + \nabla_2 v_2 \\ &= \nabla_1 \nabla_2 \Psi - \nabla_2 \nabla_1 \Psi = 0 \end{aligned} \quad (2.75)$$

Bemerkungen:

- $\vec{v} = \vec{\nabla} \times \Psi$
- Ψ ist die z-Komponente eines Vektorpotentials \vec{A} :

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} \nabla_2 A_3 - \nabla_3 A_2 \\ \nabla_3 A_1 - \nabla_1 A_3 \\ \nabla_1 A_2 - \nabla_2 A_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla_2 A_3 \\ -\nabla_1 A_3 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow A_3 \hat{=} \Psi$$

(Im 2D gilt: $v_3 = 0$; $\nabla_3 A_i = 0$)

Komplexes Geschwindigkeitspotential W :

$$z = a + ib = r_1 + ir_2 \quad (2.76)$$

Es gilt:

$$v_1 = \nabla_1 \Phi = \nabla_2 \Psi \quad (2.77)$$

$$v_2 = \nabla_2 \Phi = -\nabla_1 \Psi \quad (2.78)$$

Dies sind die Cauchy-Riemannschen Differenzialgleichungen für komplexe Funktionen (in diesem Fall für die komplexe Funktion $W(z)$, deshalb ist $W(z)$ holomorph).

$$\begin{aligned} W(z) &= \Phi(z) + i\Psi(z) \\ &= \Phi(r_1, r_2) + i\Psi(r_1, r_2) \end{aligned} \quad (2.79)$$

Berechne die Geschwindigkeit:

$$w = \frac{dW}{dz} = \frac{\partial(\Phi + i\Psi)}{\partial r_1} - \frac{\partial(\Phi + i\Psi)}{i\partial r_2} = v_1 - iv_2 \quad (2.80)$$

$$w^* = \left(\frac{dW}{dz}\right)^* = v_1 + iv_2 \quad (2.81)$$

Aus w und w^* kann \vec{v} berechnet werden.

Bedeutung von Ψ :

Stromlinien sind definiert als: $\frac{dr_1}{dr_2} = \frac{dv_1}{dv_2}$

$$v_2 dr_1 = v_1 dr_2 \quad (2.82)$$

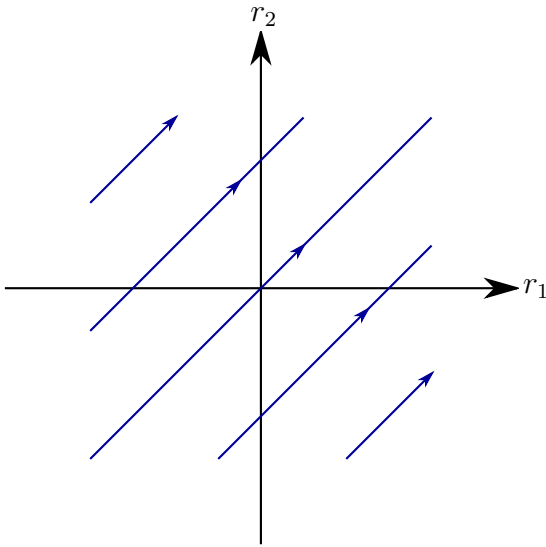
$$v_1 dr_2 - v_2 dr_1 = 0$$

$$\nabla_2 \Psi dr_2 + \nabla_1 \Psi dr_1 = 0$$

$$\Rightarrow 2d\Psi = 0$$

$$\Rightarrow \Psi \text{ ist konstant entlang einer Stromlinie} \quad (2.83)$$

Beispiel 1: Grundströmung

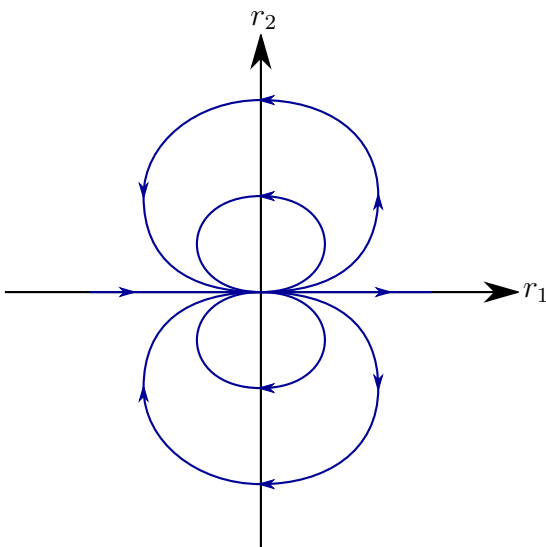


$$\begin{aligned} W(z) &= \alpha z = (a + bi)(r_1 + ir_2) \\ &= ar_1 - br_2 + i(br_1 + ar_2) \\ &= \Phi + i\Psi \end{aligned}$$

Stromfunktion: $\Psi = br_1 + ar_2$

$$\begin{aligned} w^* &= \left(\frac{dW}{dz} \right)^* = \alpha^* \\ &= a - ib = v_1 + iv_2 \\ \Rightarrow v_1 &= a; \quad v_2 = -b \end{aligned}$$

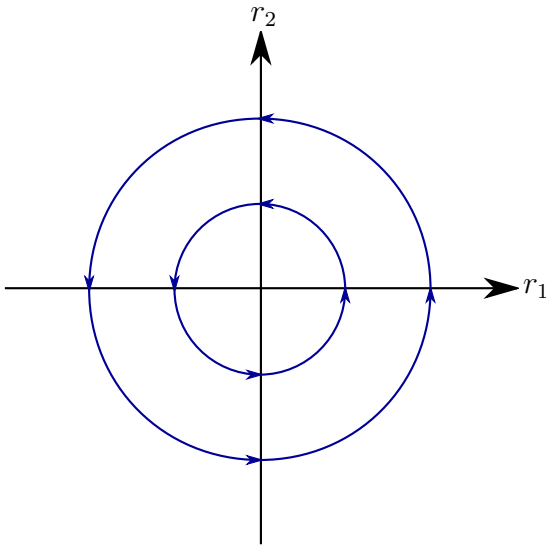
Beispiel 2: Dipolströmung



$$\begin{aligned} W(z) &= \frac{1}{z} = \frac{1}{r} e^{-i\phi} = \frac{1}{r} (\cos \phi - i \sin \phi) \\ &= \Phi + i\Psi \quad \text{mit } z = r e^{i\phi} \end{aligned}$$

Stromfunktion: $\Psi = -\frac{\sin \psi}{r}$

$$\begin{aligned} w^* &= \left(\frac{dW}{dz} \right)^* = \left(-\frac{1}{z^2} \right)^* = \left(-\frac{e^{-2i\phi}}{r^2} \right)^* \\ &= -\frac{e^{2i\phi}}{r^2} = -\frac{1}{r^2} (\cos 2\phi + i \sin 2\phi) \\ &= v_1 + iv_2 \\ \Rightarrow v_1 &= -\frac{\cos 2\phi}{r^2}; \quad v_2 = -\frac{\sin 2\phi}{r^2} \end{aligned}$$

Beispiel 3: *Wirbelströmung*

$$W(z) = \frac{\Gamma_0}{2\pi i} \ln z = \frac{\Gamma_0}{2\pi i} \ln r + \frac{\Gamma_0}{2\pi} \phi$$

$$= \Phi + i\Psi$$

$$\text{Stromfunktion: } \Psi = -\frac{\Gamma_0}{2\pi} \ln z$$

$$w^* = \left(\frac{dW}{dz} \right)^* = \left(\frac{\Gamma_0}{2\pi i} \frac{1}{z} \right)^*$$

$$= \frac{\Gamma_0}{2\pi (ir_1 - r_2)} = \dots = -\frac{\Gamma_0 (r_2 - ir_1)}{2\pi (r_1^2 + r_2^2)}$$

$$= v_1 + iv_2$$

$$\Rightarrow v_1 = -\frac{\Gamma_0 r_2}{2\pi r^2}; \quad v_2 = \frac{\Gamma_0 r_1}{2\pi r^2} \quad \text{mit } r_1^2 + r_2^2 = r^2$$

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \quad \omega_1 = \omega_2 = 0$$

$$\omega_3 = \frac{1}{2} (\nabla_1 v_2 - \nabla_2 v_1) = \frac{\Gamma_0}{4\pi} \left(\frac{1}{r^2} + r_1 \frac{\partial}{\partial r_1} \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2} + r_2 \frac{\partial}{\partial r_2} \frac{1}{r^2} \right)$$

$$= \frac{\Gamma_0}{4\pi} \left(\frac{2}{r^2} - \frac{2r_1^2}{r^4} - \frac{2r_2^2}{r^4} \right)$$

$$= \frac{\Gamma_0}{4\pi} \left(\frac{2}{r^2} - \frac{2r^2}{r^4} \right) = 0$$

\Rightarrow Die Wirbelströmung ist außer am Ursprung rotationsfrei; vgl. starre Rotation mit $\vec{\omega} \neq 0$, aber mit einer Zirkulation $\Gamma = \oint_C \vec{v} d\vec{r} = \oint_C \Gamma_0 / (2\pi r) dr = \Gamma_0$

Beispiel 4: *Umströmter Zylinder*

$$W = v_0 z + \frac{v_0 R^2}{z} - \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z \quad (v_0, R, \Gamma \text{ reell})$$

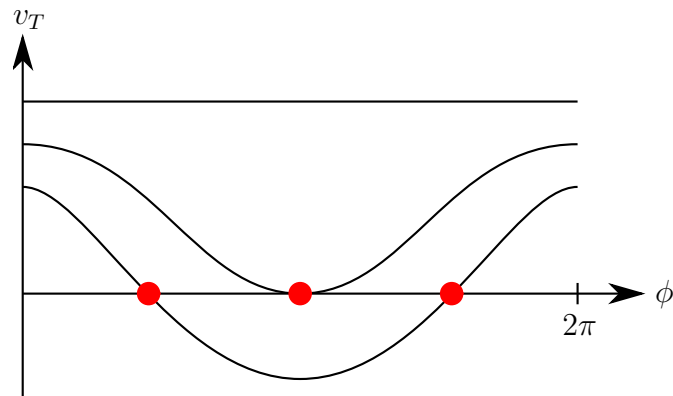
$$\begin{aligned} \text{Stromfunktion: } \Psi &= v_0 r \sin \phi - v_0 R^2 \frac{\sin \phi}{r} + \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r \\ &= v_0 \sin \phi \left(r - \frac{R^2}{r} \right) + \frac{\Gamma_0}{2\pi} \ln r \end{aligned}$$

Für $r = R$ gilt

$$\Psi = \frac{\Gamma_0}{2\pi} \ln R = \textit{konst.} \quad (2.84)$$

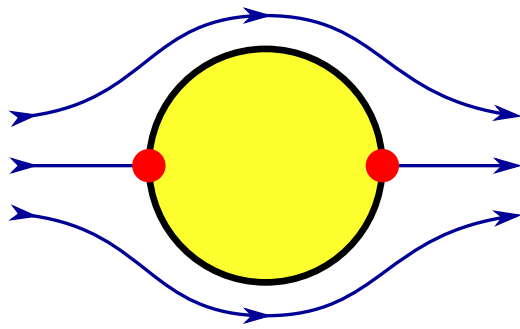
Damit ist der Kreis mit Radius R eine Stromlinie und Innen und Außen sind entkoppelt: \vec{v} hat also auf dem Kreis nur eine Tangentialkomponente (keine Haftbedingung).

Wenn sich die Richtung der Tangentialgeschwindigkeit umkehrt, gibt es einen Staupunkt ($\vec{v} = 0$):



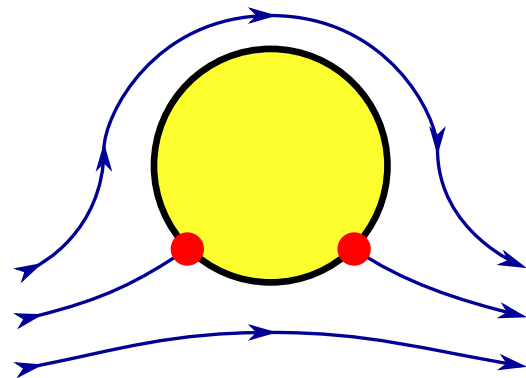
$$\omega = \frac{dW}{dz} = v_1 - i v_2 = 0$$

$$\omega = v_0 \left(1 - \frac{R^2}{z^2} \right) - \frac{\Gamma_0}{2\pi i z} = 0 \Leftrightarrow z_{1/2} = \frac{\Gamma_0}{4\pi i v_0} \pm \sqrt{-\left(\frac{\Gamma_0}{4\pi v_0}\right)^2 + R^2} \quad (2.85)$$



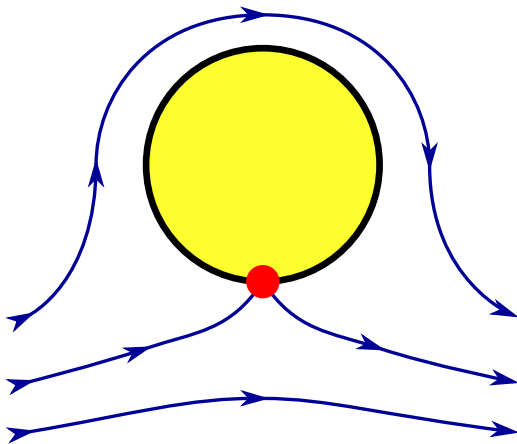
$$\Gamma_0 = 0$$

$$\rightarrow z_{1/2} = \pm R$$



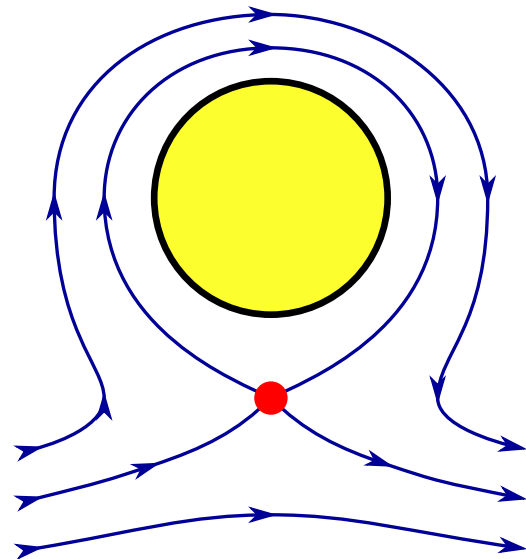
$$0 < \Gamma_0 < 4\pi v_0 R$$

$$\rightarrow |z_{1/2}| = R$$



$$\Gamma_0 = 4\pi v_0 R$$

$$\rightarrow z_{1/2} = \frac{\Gamma_0}{4\pi i v_0} = -iR$$



$$\Gamma_0 > 4\pi v_0 R$$

$$\rightarrow z_1 = z_2 \text{ und } |z_1| > R$$

kreuzende Stromlinien \Leftrightarrow externer Staupunkt

Experimentelle Realisierung: Rotierender Zylinder in der Grundströmung!

2.4.2 Kraft auf umströmten Zylinder

In Abwesenheit von Reibung ($\eta = 0 \Leftrightarrow$ Potentialströmung) ist die Kraft auf den Zylinder gleich dem Integral über den auf die Oberfläche wirkenden Druck:

$$\vec{F} = - \oint_C p \hat{n} ds = - \oint p(\theta) R \hat{n} d\theta$$

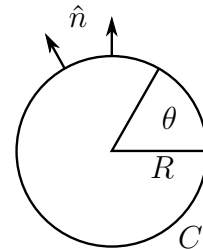
Hierbei beschreibt \vec{F} eine Kraft pro Länge und das Integral geht über die Kreiskontur C .

$$\hat{n} = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

Bernoulli-Gleichung:

$$p + \frac{\rho_0}{2}v^2 = konst. = p_0$$

Die Bernoulligleichung gilt überall außerhalb des Zylinders, da dort die Wirbeldichte Null ist.



$$\begin{aligned} w &= \frac{dw}{dz} = v_1 - iv_2; \quad w^* = v_1 + iv_2 \\ ww^* &= v_1^2 + v_2^2 = |v|^2 \\ \Rightarrow p &= p_0 - \frac{\rho_0}{2}ww^* \\ w &= v_0 \left(1 - \frac{R^2}{z^2} \right) - \frac{\Gamma_0}{2\pi i} \frac{1}{z} \\ &= v_0 \left(1 - \frac{R^2}{r^2} e^{-i2\theta} \right) - \frac{\Gamma_0}{2\pi i r} e^{-i\theta} \\ &= v_0 \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \cos 2\theta \right) - \frac{\Gamma_0}{2\pi r} \sin \theta + iv_0 \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \sin 2\theta \right) + \frac{i\Gamma_0}{2\pi r} \cos \theta \\ w^* &= \dots - i(\dots) \end{aligned}$$

Kraft entlang Strömung:

$$\begin{aligned} F_1 &= -R \int_0^{2\pi} p(\theta) \cos \theta d\theta \\ &= -R \int_0^{2\pi} \left(\underbrace{p_0}_{=0} - \frac{\rho_0}{2} ww^* \right) \cos \theta d\theta \end{aligned} \tag{2.86}$$

p_0 ist konstant und fällt deshalb beim Integrieren raus. Senkrecht zur Strömung:

$$F_2 = R \int_0^{2\pi} \left(\underbrace{p_0}_{=0} - \frac{\rho_0}{2} ww^* \right) \sin \theta d\theta \tag{2.87}$$

...

$$\boxed{F_1 = 0} \quad \text{d'Alembertsches Paradoxon} \tag{2.88}$$

Es wirkt keine Kraft F_1 in Strömungsrichtung auf den Zylinder (da das Druckprofil symmetrisch ist).

$$\boxed{F_2 = \rho_0 \Gamma_0 v_0} \quad \text{Magnus-Effekt} \tag{2.89}$$

Die Kraft F_2 ist senkrecht zur Grundströmung und proportional zur Zirkulation. Beides gilt allerdings nur für $\eta = 0$.

Durch konforme Transformationen vom Kreis zu komplizierten Querschnitten kann man zeigen, dass $F_2 = \rho_0 \Gamma_0 v_0$ exakt für beliebige Formen gilt (\cong Kutta-Joukowski-Theorem). Γ_0 hängt dann vom Querschnitt und Anstellwinkel α ab.

2.4.3 Wirbeldichte-Gleichung

Euler-Gleichung:

$$\rho \dot{\vec{v}} + \frac{\rho}{2} \nabla v^2 - \rho \vec{v} \times (\nabla \times \vec{v}) = \rho \vec{F} - \nabla p \quad (2.90)$$

Wirbeldichte $\vec{\omega}(r) = \frac{1}{2} (\nabla \times \vec{v}(r))$

$$\Pi(p) = \int_0^P \frac{dp'}{\rho(p')}; \quad \vec{F} = -\nabla U \quad (2.91)$$

$$\Rightarrow \dot{\vec{v}} + 2\vec{\omega} \times \vec{v} = -\nabla \left(\frac{1}{2} v^2 + U + \Pi \right) = -\nabla H \quad | \cdot \nabla \times \quad (2.92)$$

$$2\dot{\vec{\omega}} + 2\nabla \times (\vec{\omega} \times \vec{v}) = -\nabla \times \nabla H = 0 \quad (2.93)$$

$$\nabla \times (\vec{\omega} \times \vec{v}) = \underbrace{\vec{\omega}}_{=0} \underbrace{(\nabla \cdot \vec{v})}_{=0} - \underbrace{\vec{v}}_{=\frac{1}{2} \nabla \cdot \nabla \times \vec{v} = 0} (\nabla \cdot \vec{\omega}) + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot \nabla) \vec{v} \quad (2.94)$$

Inkompressibilität

Die Gleichung (2.93) ist gleich Null, da die Rotation des Potentials verschwindet. Damit erhält man insgesamt:

$$\dot{\vec{\omega}} = (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{\omega} = (\vec{\omega} \cdot \nabla) \vec{v} \quad (2.95)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d\vec{\omega}}{dt} = (\vec{\omega} \cdot \nabla) \vec{v}} \quad \text{Wirbeldichtegleichung} = \text{Vortexgleichung} \quad (2.96)$$

Für 2D-Strömung:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1(r_1, r_2) \\ v_2(r_1, r_2) \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \vec{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_3 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \omega_3 \nabla_3 v_i = 0$$

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = 0 \Rightarrow \text{Die Wirbeldichte eines Flüssigkeitselements bleibt erhalten.} \quad (2.97)$$

Für stationäre 2D-Strömung:

$$(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{\omega} = 0 \Rightarrow \text{Die Wirbeldichte entlang einer Stromlinie ist konstant.} \quad (2.98)$$

Mathematischer Einschub: *Zeitableitung von Integralen mit bewegten Rändern*

- Volumenintegral über ein mit $\vec{u}(r, t)$ bewegtes Volumen:

$$\frac{d}{dt} \iiint_{V(t)} a(\vec{r}, t) dV = \iiint_{V(t)} \left[\frac{\partial a}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (a \cdot \vec{u}) \right] dV(t) \quad (2.99)$$

- Flächenintegral über eine mit $\vec{u}(r, t)$ bewegte Fläche:

$$\frac{d}{dt} \iint_{F(t)} \vec{a}(\vec{r}, t) d\vec{F} = \iint_{F(t)} \left[\frac{\partial \vec{a}}{\partial t} + \vec{\nabla} \times (\vec{a} \times \vec{u}) + \vec{u} \vec{\nabla} \cdot \vec{a} \right] d\vec{F} \quad (2.100)$$

- Linienintegral über eine mit $\vec{u}(r, t)$ bewegte Linie:

$$\frac{d}{dt} \int_{r_1(t)}^{r_2(t)} \vec{a}(r, t) dr = \int_{r_1(t)}^{r_2(t)} \left[\frac{\partial \vec{a}}{\partial t} + \vec{\nabla} (\vec{u} \cdot \vec{a}) - \vec{u} \times (\vec{\nabla} \times \vec{a}) \right] d\vec{F} \quad (2.101)$$

2.4.3.1 Thomsonscher Wirbelsatz

$\Gamma = \oint_{C(t)} \vec{v} \cdot d\vec{r}$ sei die Zirkulation entlang einer (mit der Geschwindigkeit \vec{v}) mitbewegten Kontur $C(t)$.

Gesucht: $\frac{d\Gamma}{dt}$, Änderung von Γ (entlang der mitbewegten Kontur)

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \oint_{C(t)} \vec{v}(r, t) d\vec{r} &\stackrel{(2.101)}{=} \oint_{C(t)} \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \underbrace{\vec{\nabla}(\vec{v} \cdot \vec{v}) - \vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v})}_{=\frac{1}{2}\vec{\nabla}v^2 - \vec{v} \cdot \vec{\nabla}\vec{v}} \right] d\vec{r} \\
 &= \oint_{C(t)} \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}\vec{v} + \underbrace{\frac{1}{2}\vec{\nabla}v^2}_{=0, \text{ da } \oint \frac{1}{2}\vec{\nabla}v^2 d\vec{r}=0} \right) d\vec{r} \\
 &= \oint_{C(t)} \frac{d\vec{v}}{dt} d\vec{r} \\
 &= \oint_{C(t)} -\vec{\nabla}(U + \Pi) d\vec{r} = 0
 \end{aligned} \tag{2.102}$$

Die letzte Umformung geschah mit Hilfe der Euler-Gleichung: $\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} - \frac{\vec{\nabla}p}{\rho} = -\vec{\nabla}(U + \Pi)$. Hiermit folgt:

$$\boxed{\frac{d\Gamma}{dt} = 0} \quad \text{Thomsonscher Wirbelsatz} \tag{2.103}$$

In idealen Flüssigkeiten ändert sich die Zirkulation entlang mitbewegter Konturen nicht!

Herleitung der differentiellen Form des Thomsonschen Wirbelsatzes:

$$\begin{aligned}
 \frac{d\Gamma}{dt} &\stackrel{Stokes}{=} \frac{d}{dt} \int_F \underbrace{\vec{\nabla} \times \vec{v}}_{=2\vec{\omega}} d\vec{F} \\
 &\stackrel{(2.100)}{=} 2 \int_F \left[\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + \vec{\nabla} \times (\vec{\omega} \times \vec{v}) + \underbrace{\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \vec{\omega}}_{=\vec{\nabla}\vec{v} \times \vec{v}=0} \right] d\vec{F} = 0
 \end{aligned} \tag{2.104}$$

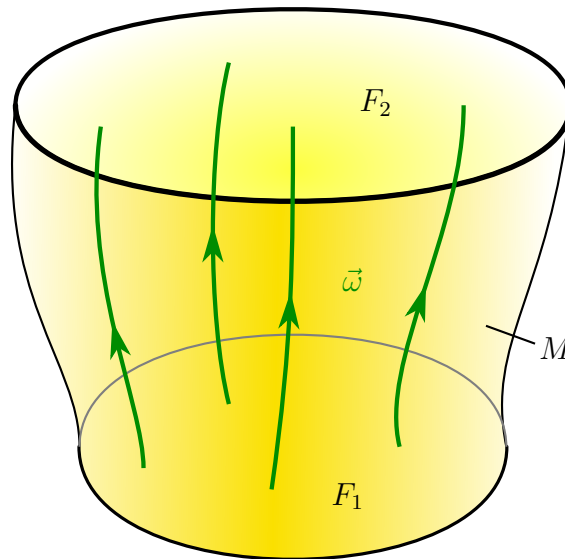
Für beliebige Fläche (vgl. mit der Herleitung der Wirbeldichte-Gleichung):

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} - \vec{\nabla} \times (\vec{v} \times \vec{\omega}) = 0 \tag{2.105}$$

Also entspricht die differentielle Form des Thomsonschen Wirbelsatzes der Wirbeldichte-Gleichung.

2.4.3.2 Helmholtzsche Wirbelsätze

- **Wirbellinien:** Feldlinien des $\vec{\omega}$ -Feldes
- **Wirbelfaden:** Alle durch ein Flächenelement dF gehende Wirbellinien
- **Wirbelstärke:** Wirbelfluss durch eine mit \vec{v} bewegte Fläche



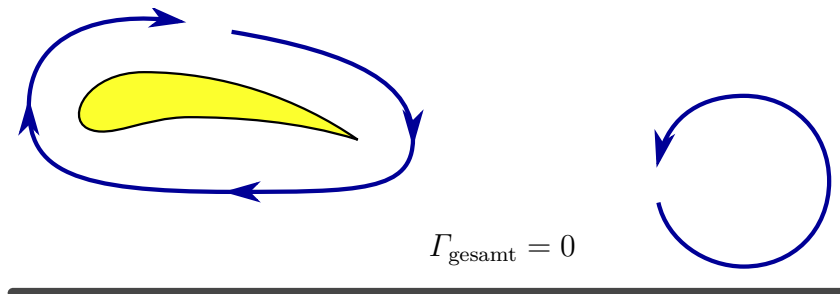
1. Wirbelstärke eines Wirbelfadens ist zeitlich konstant.
 $\left[\Leftrightarrow \text{Thomson: } \iint_{F(t)} \vec{\omega} \cdot d\vec{F} = \frac{1}{2} \iint \vec{\nabla} \times \vec{v} d\vec{F} = \frac{1}{2} \oint_{C(t)} \vec{v} d\vec{r} = \frac{1}{2} \Gamma \text{ (und } d\Gamma/dt = 0) \right]$
2. Wirbelstärke eines Wirbelfadens ist räumlich konstant (Wirbelfäden haben kein Ende).
 Beweis:

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div} \vec{\omega} &= 0 \\
 \rightarrow \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{\omega} dV &= 0 \\
 &= \int_{F_1} \vec{\omega} \cdot d\vec{F} + \underbrace{\int_M \vec{\omega} \cdot d\vec{F}}_{=0} - \int_{F_2} \vec{\omega} \cdot d\vec{F} = 0 \\
 \Rightarrow \iint_{F_1} \vec{\omega} \cdot d\vec{F} &= \iint_{F_2} \vec{\omega} \cdot d\vec{F} \tag{2.106}
 \end{aligned}$$

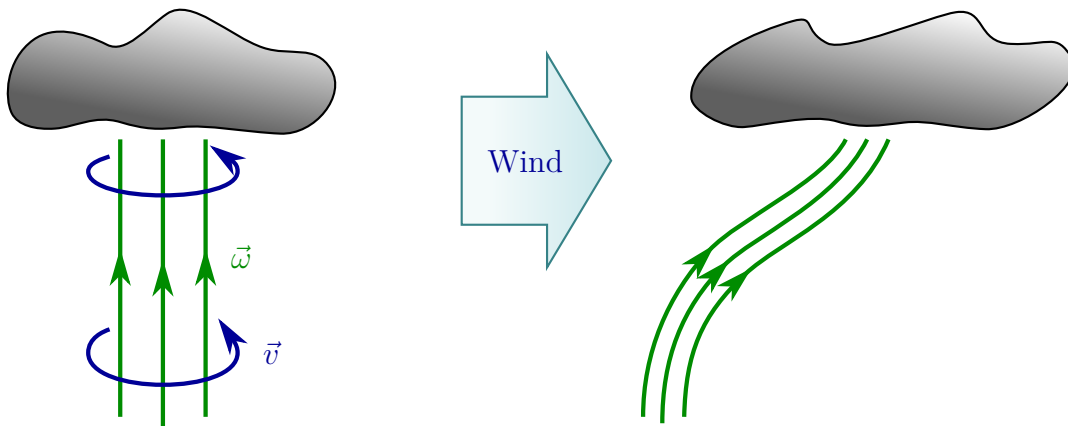
Das Integral über die Mantelfläche M ergibt Null, da M so konstruiert ist, dass $\vec{\omega} \perp d\vec{F}$ auf M .

2.4.3.3 Konsequenzen, Beispiele

- Wirbellinien enden nicht, können aber geschlossene Kurven bilden (z.B. Rauchringe).
- Da Γ erhalten bleibt (ideale Flüssigkeit), wie entsteht dann ein endliches Γ beim Tragflügel?
→ „starting vortex“: Ein Wirbel bleibt am Flughafen zurück.



- Verzerrung eines Wirbelfadens führt zur Erhöhung von $\vec{\omega}$.

Annahme:

Flüssigkeitsvolumen des Wirbelfadens bleibt bei Verzerrung konstant (inkompressibel)

→ bei Verlängerung des Wirbelfadens sinkt der Querschnitt

→ $\vec{\omega}$ steigt lokal an (und da $\Gamma = v 2\pi r = \text{konst.}$ erhöht sich die Geschwindigkeit)

→ Tornado

2.4.4 Lift-Theorem (konforme Abbildungen)

Gegeben seien komplexe (analytische) Funktionen $W(z) = \Phi(z) + i\Psi(z)$. Wähle eine analytische Funktion $\tilde{z} = f(z)$ und ihre Inverse $z = F(\tilde{z})$, so dass $z = F(f(z))$. Dann ist $\tilde{W}(z) = W(F(\tilde{z}))$ analytisch.

$$z = r_1 + ir_2 \quad \text{und} \quad \tilde{W}(z) = \tilde{\Phi}(r_1, r_2) + i\tilde{\Psi}(r_1, r_2) \quad (2.107)$$

Wie vorher gelten die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen:

$$\tilde{v}_1 = \nabla_1 \tilde{\Phi} = \nabla_2 \tilde{\Psi} \quad \text{und} \quad \tilde{v}_2 = \nabla_2 \tilde{\Phi} = -\nabla_1 \tilde{\Psi} \quad (2.108)$$

(Betrachte hier rotationsfreie inkompressible Strömungen)

An korrespondierenden Punkten z und $\tilde{z} = f(z)$ sind die Funktionen W und \tilde{W} gleich.

$$\tilde{W}(\tilde{z}) = W(F(\tilde{z})) = W(z) \quad (2.109)$$

$$\Rightarrow \Psi \text{ und } \tilde{\Psi} \text{ sind dort auch gleich.} \quad (2.110)$$

$$\Rightarrow \text{Stromlinien werden auf Stromlinien abgebildet.} \quad (2.111)$$

Eine feste Grenzfläche, impermeabel für Flüssigkeiten (z.B. der Zylinder im obigen Beispiel des umströmten Zylinders), die in der z -Ebene definiert ist, wird in eine andere feste (impermeable) Grenzfläche in der \tilde{z} -Ebene abgebildet. Wie wählt man die Funktion $f(z)$, so dass man einen Tragflächenquerschnitt erhält?

Joukowski Transformation:

$$\tilde{z} = z + \frac{c^2}{z} \quad (2.112)$$

Betrachte den Kreis $z = Re^{i\theta}$ mit $0 \leq c \leq R$

$$\rightarrow \tilde{z} = \tilde{r}_1 + i\tilde{r}_2 = Re^{i\theta} + \frac{c^2}{R}e^{-i\theta} = \left(R + \frac{c^2}{R}\right) \cos \theta + i \left(R - \frac{c^2}{R}\right) \sin \theta \quad (2.113)$$

Der Kreis wird auf die Ellipse abgebildet:

$$\frac{\tilde{r}_1^2}{\left(R + \frac{c^2}{R}\right)^2} + \frac{\tilde{r}_2^2}{\left(R - \frac{c^2}{R}\right)^2} = 1 \quad \text{mit den Hauptachsen } R + \frac{c^2}{R} \text{ und } R - \frac{c^2}{R} \quad (2.114)$$

Inverse Joukowski-Transformation:

$$z = \frac{\tilde{z}}{2} + \sqrt{\frac{\tilde{z}^2}{4} - c^2} \quad (2.115)$$

Umströmter Zylinder mit Strömungsrichtung α

$$W(z) = v_0 \left(ze^{-i\alpha} + \frac{R^2}{ze^{-i\alpha}} \right) - \frac{\Gamma_0}{2\pi i} \ln z \quad (2.116)$$

Setze $z(\tilde{z})$ in $W(z)$ ein: $\Rightarrow W(z(\tilde{z})) \equiv \tilde{W}(\tilde{z})$

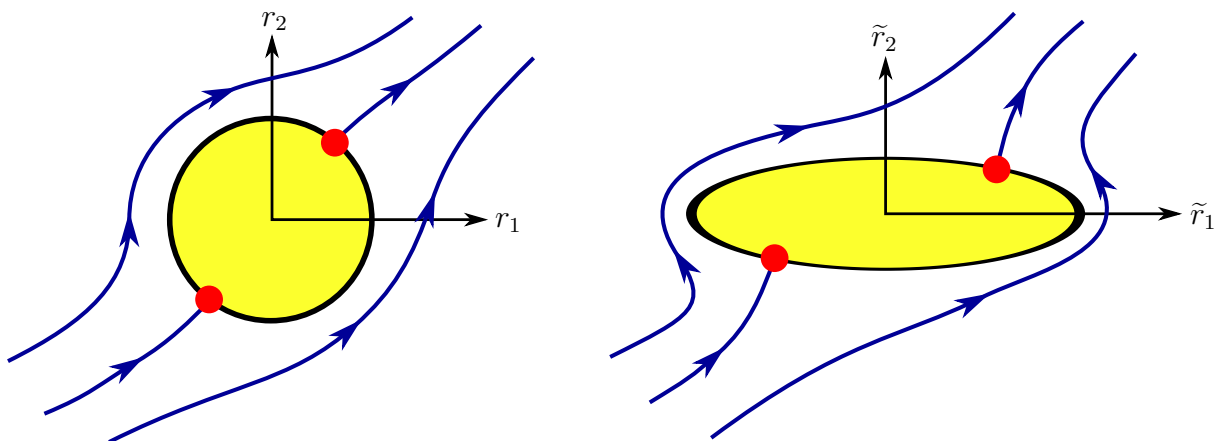


Abbildung 2.5: Strömung um einen Zylinder (Kreis) in der z -Ebene und nach Transformation zu einer Ellipse in der \tilde{z} -Ebene

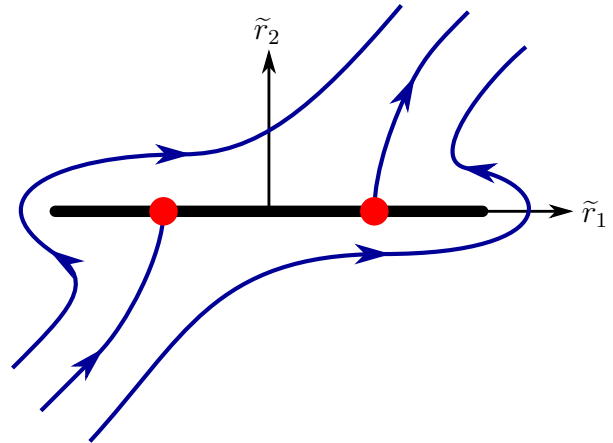
Explizit für den **Spezialfall der dünnen Platte**:

$$\tilde{z} = z + \frac{R^2}{z}$$

Hauptachsen $2R$ und 0

Geschwindigkeit als Funktion von z im transformierten Koordinatensystem:

$$\begin{aligned} \tilde{v}_1 - i\tilde{v}_2 &= \frac{d\tilde{W}}{d\tilde{z}} = \frac{dW/dz}{d\tilde{z}/dz} \\ &= \frac{v_0 e^{-i\alpha} - v_0 e^{i\alpha} \frac{R^2}{z^2} - \frac{\Gamma_0}{2\pi iz}}{1 - \frac{R^2}{z^2}} \end{aligned}$$



Mit der inversen Funktion $z(\tilde{z})$ kann das als Funktion von \tilde{z} geschrieben werden.

An den Plattenenden $z = \pm R$ gibt es Strömungssingularitäten und dort ist $|v| = \infty$. Die Singularität am hinteren Ende kann durch die Wahl von $\Gamma_0 \neq 0$ entfernt werden, so dass der hintere Staupunkt am Plattenende liegt!

Staupunktgleichung für $z = +R$

$$\frac{d\tilde{W}}{d\tilde{z}} = 0 \tag{2.117}$$

$$\frac{dW}{dz} = v_0 e^{-i\alpha} - v_0 e^{i\alpha} - \frac{\Gamma_0}{2\pi i R} = 0 \tag{2.118}$$

$$\Leftrightarrow -v_0 2i \sin \alpha - \frac{\Gamma_0}{2\pi i R} = 0 \tag{2.119}$$

$$\rightarrow \boxed{\Gamma_0 = 4\pi v_0 R \sin \alpha} \quad \text{Kutta-Joukowski-Bedingung} \tag{2.120}$$

\Leftrightarrow heuristische Beziehung zwischen Anstellwinkel α und Zirkulation Γ_0 !

Strömung am hinteren Ende:

Entwickle $\frac{d\tilde{W}}{d\tilde{z}}$ nach $\tilde{z} = 2R + \varepsilon$

Limes $\varepsilon \rightarrow 0$ am Quasistaupunkt ($|v| \neq 0$)

$\tilde{z} = 2R$:

$$\tilde{v}_1 = v_0 \cos \alpha \quad \tilde{v}_2 = 0$$

Es gibt aber eine Singularität am vorderen Ende! Singularitäten sind schlecht, da die Strömung dort nicht-ideal wird! (Dadurch gibt es Reibung und die Näherung wird schlecht)

Empirisch: Singularitäten kommen typischerweise nicht vor!

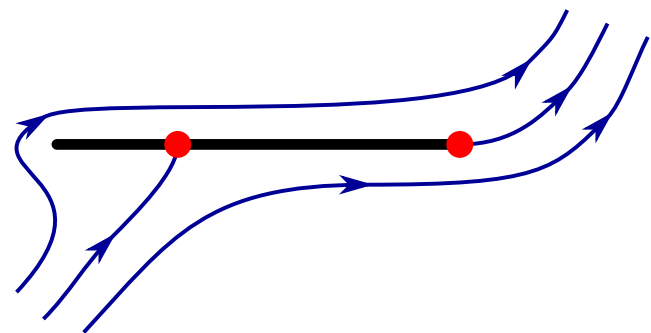
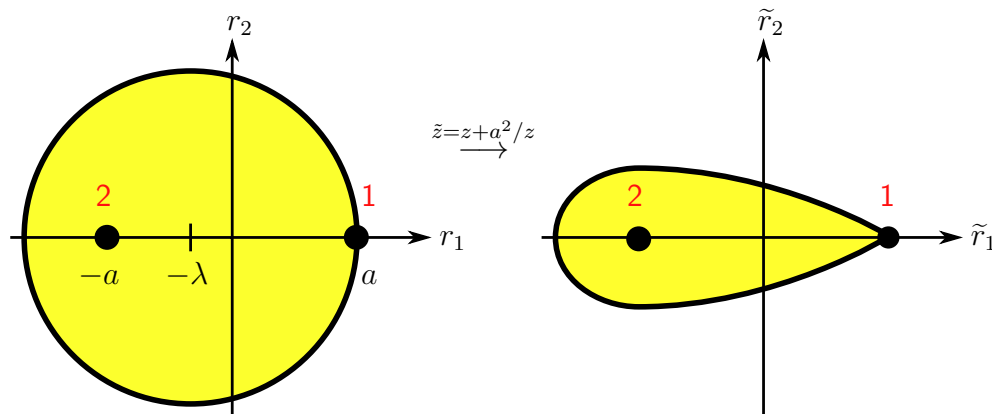


Abbildung 2.6: Strömung um eine dünne Platte

2.4.4.1 „Symmetrischer“ Flügel mit nur einer Singularität



Kreis um $(-\lambda, 0)$ mit $z = -\lambda + (a + \lambda)e^{i\gamma}$ und Radius $R = a + \lambda$.

$$\tilde{z} = -\lambda + (a + \lambda)e^{i\gamma} + \frac{a^2}{-\lambda + (a + \lambda)e^{i\gamma}} \quad (2.121)$$

Geschwindigkeitsprofil im z -Koordinatensystem \Leftrightarrow umströmter Zylinder

$$W(z) = v_0(z + \lambda)e^{-i\alpha} + \frac{v_0(a + \lambda)^2}{z + \lambda}e^{i\alpha} - \frac{\Gamma_0}{2\pi i} \ln(z + \lambda) \quad (2.122)$$

$$\frac{d\tilde{W}(\tilde{z})}{d\tilde{z}} = \frac{dW/dz}{d\tilde{z}/dz} = \frac{v_0 \left(e^{-i\alpha} - \frac{(a+\lambda)^2}{(z+\lambda)^2} e^{i\alpha} \right) - \frac{\Gamma_0}{2\pi i(z+\lambda)}}{1 - \frac{a^2}{z^2}} \quad (2.123)$$

Nun macht nur noch die Singularität bei $z = +a$ Probleme, da $z = -a$ im Flügel liegt!

Um die Singularität bei $z = +a$ zu heben, muss für den Zähler gelten:

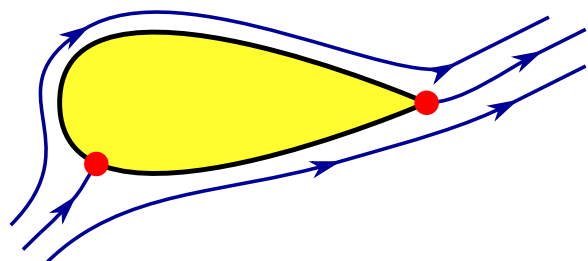
$$v_0 \left(e^{-i\alpha} - e^{i\alpha} \right) - \frac{\Gamma_0}{2\pi i(a+\lambda)} \stackrel{!}{=} 0$$

$$\rightarrow \boxed{\Gamma_0 = 4\pi v_0(a + \lambda) \sin \alpha} \quad \text{Kutta-Joukowski-Bedingung} \quad (2.124)$$

Die Strömung ist jetzt überall glatt und endlich!

Für $\lambda \ll a$: Dünner Flügel mit Länge $4a$ und Dicke $3\sqrt{3}\lambda$.

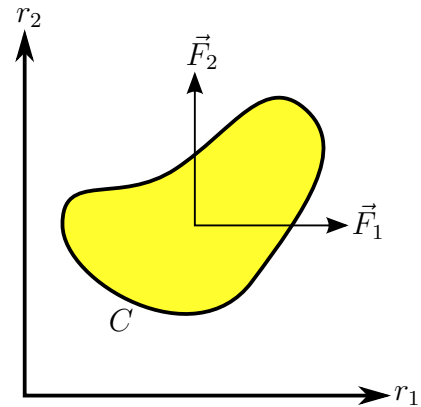
Die Idee ist, dass das experimentell beobachtete Strömungsfeld der Kutta-Joukowski-Bedingung gehorcht $\hat{=}$ ad-hoc Annahme (experimentell ok)!



2.4.4.2 Blasius-Theorem

Eine stationäre Strömung werde durch $W(z)$ beschrieben. Für die Kraft auf einen Körper mit Kontur C gilt

$$F_1 - iF_2 = \frac{i\rho_0}{2} \oint_C \left(\frac{dW}{dz} \right)^2 dz$$

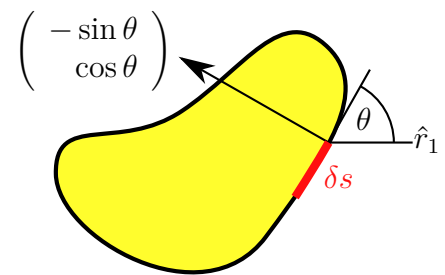


Beweis:

Die Kraft auf ein Oberflächenelement ist

$$\begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} p \delta s = \begin{pmatrix} dF_1 \\ dF_2 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow dF_1 - idF_2 = -p(\sin \theta + i \cos \theta) \delta s = -p i e^{-i\theta} \delta s$$



Die Kontur C ist eine Stromlinie, also

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = |v(r_1, r_2)| \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$$

$$\frac{dW}{dz} = v_1 - iv_2 = |v| e^{-i\theta} \text{ auf der Kontur } C$$

Bernoulli-Gleichung: $p = p_0 - \frac{\rho_0}{2} v^2$

$$\rightarrow dF_1 - idF_2 = \left(\frac{\rho_0}{2} v^2 - p_0 \right) i e^{-i\theta} \delta s \tag{2.125}$$

$$= \frac{i\rho_0}{2} \left(\frac{dW}{dz} \right)^2 e^{i\theta} \delta s - \underbrace{p_0 i e^{-i\theta} \delta s}_{-ip_0(\delta r_1 - i\delta r_2)=0} \tag{2.126}$$

Mit $dz = \delta s e^{i\theta}$ gilt also:

$$dF_1 - idF_2 = \frac{i\rho_0}{2} \left(\frac{dW}{dz} \right)^2 dz \tag{2.127}$$

Durch Integrieren über eine geschlossene Kontur C erhält man das Blasius-Theorem. ■

2.4.4.3 Kutta-Joukowski-Auftriebtheorem

Gegeben sei eine stationäre, ideale Strömung in 2D und ein beliebiger Körper mit Kontur C . Aus gegebener Zirkulation Γ_0 folgt für die Kraft auf den Körper:

$$\boxed{F_1 = 0 \quad F_2 = \rho_0 v_0 \Gamma_0} \quad (2.128)$$

Beweis:

Der Koordinatenursprung sei im Körper selbst.

Annahme: Analytische Strömung mit Randbedingung derart, dass $v(z) \rightarrow v_0$ für $|z| \rightarrow \infty$.

$$1) \quad \Leftrightarrow \frac{dW}{dz} = v_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \frac{a_3}{z^3} + \dots \overbrace{[+b_1 z + b_2 z^2 + \dots]}^{\text{sonst divergent}} \quad (\text{Laurent-Reihe})$$

$$2) \quad \text{Cauchys Theorem: } F_1 - iF_2 = \frac{i\rho_0}{2} \oint_C \left(\frac{dW}{dz}\right)^2 dz = \frac{i\rho_0}{2} \oint_{C'} \left(\frac{dW}{dz}\right)^2 dz \quad (2.129)$$

$$\left(\frac{dW}{dz}\right)^2 = v_0^2 + \frac{2v_0 a_1}{z} + \frac{a_1^2 + 2a_2 v_0}{z^2} + \mathcal{O}(z^{-3}) \quad (2.130)$$

Residuenkalkül: Einziger Beitrag zum Integral kommt vom $\frac{1}{z}$ Term!

$$\text{Res} \left[\left(\frac{dW}{dz}\right)^2 \right] = 2v_0 a_1 \quad (2.131)$$

$$F_1 - iF_2 = \frac{i\rho_0}{2} \cdot 2\pi i \cdot 2v_0 a_1 = -2\pi\rho_0 v_0 a_1 \quad (2.132)$$

Bestimmung von a_1 :

$$\oint_{C'} \frac{dW}{dz} dz = 2\pi i \cdot a_1 = W \Big|_r^{r e^{i2\pi}}$$

$$\boxed{\ln z = \ln r + i\theta}$$

$$\rightarrow \text{Für einen Zylinder gilt } W = -\frac{\Gamma_0}{2\pi i} \ln z = -\frac{\Gamma_0}{2\pi i} \ln r - \frac{\Gamma_0 \theta}{2\pi}$$

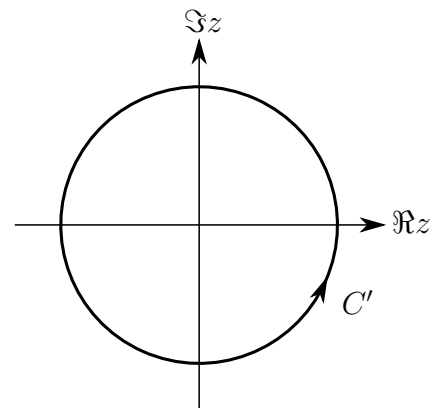
Also ändert sich W um $-\Gamma_0$, wenn man einmal um den Ursprung integriert!

$$2\pi i a_1 = W \Big|_r^{r e^{i2\pi}} = -\Gamma_0 \quad \rightarrow \quad a_1 = -\frac{\Gamma_0}{2\pi i} \quad (2.133)$$

Und damit:

$$\boxed{F_1 - iF_2 = \rho_0 v_0 \frac{\Gamma_0}{i}} \quad (2.134)$$

$$\Rightarrow F_1 = 0 \text{ und } F_2 = \rho_0 v_0 \Gamma_0 \quad \blacksquare$$

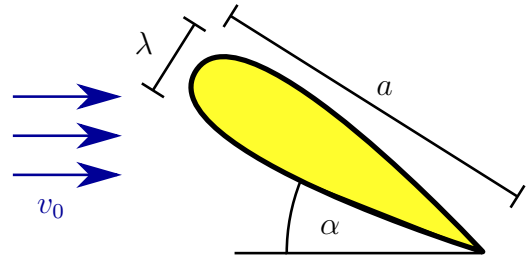


Das Kutta-Joukowski-Auftriebtheorem gilt für beliebige Querschnitte. Der Zylinder ist ein Spezialfall!

Aus der Kutta-Joukowski-Bedingung $\Gamma_0 = 4\pi v_0(a - \lambda) \sin \alpha$ und dem Kutta-Joukowski-Theorem folgt für die Kraft auf einen unter dem Winkel α angeströmten Flügel:

$$F_2 = 4\pi\rho_0 v_0^2 (a + \lambda) \sin \alpha$$

Dies stimmt gut mit dem Experiment überein, solange $\alpha \lesssim 12^\circ$. Für große α werden Viskositätseffekte wichtig!



2.5 Viskositätseffekte

Tatsächlich ist die Tangential-Geschwindigkeit am Körper Null! In Wirklichkeit gibt es eine dünne Schicht (= Grenzschicht) in der Viskositätseffekte wichtig sind, außerhalb ist die Euler-Gleichung erfüllt.

2.5.1 Hydrodynamische Ähnlichkeit

Oft können verschiedene Strömungssituationen aufeinander abgebildet werden. Dazu geht man zu dimensionslosen Größen über:

$$\begin{aligned}\vec{r} &= L\vec{r}' & L: & \text{charakteristische Länge} \\ t &= Tt' & T: & \text{charakteristische Zeit} \\ \vec{v} &= v_0\vec{v}' & v_0: & \text{charakteristische Geschwindigkeit} \\ \rho &= \rho_0\rho' & \rho_0: & \text{charakteristische Dichte} \\ p &= p_0p' & p_0: & \text{charakteristischer Druck} \\ \vec{F} &= F_0\vec{F}' & F_0: & \text{charakteristische Kraft}\end{aligned}$$

$\vec{r}', t', \vec{v}', \rho', p', \vec{F}'$ sind einheitenlos.

Navier-Stokes-Gleichung (mit $\eta' = \frac{2}{3}\eta$):

$$\rho(\dot{v}_i + v_j \nabla_j v_i) = \rho F_i - \nabla_i p + \eta \Delta v_i + \frac{\eta}{3} \nabla_i \nabla_j v_j \quad (2.135)$$

Ersetze die Größen ($\vec{r} \rightarrow \vec{r}'$ etc.) und teile durch $\frac{\rho_0 v_0^2}{L}$ (damit wird die Gleichung einheitenlos):

$$\underbrace{\frac{L}{T v_0}} \rho' \dot{v}'_i + \underbrace{\rho' v'_j}_{\frac{\rho_0 v_0^2}{L}} \nabla'_j v'_i = \underbrace{\frac{F_0 L}{v_0^2}} \rho' F'_i - \underbrace{\frac{p_0}{\rho_0 v_0^2}} \nabla'_i p' + \underbrace{\frac{\eta}{\rho L v_0}} \left(\Delta' v'_i + \frac{1}{3} \nabla'_i \nabla'_j v'_j \right) \quad (2.136)$$

Die obigen markierten Brüche charakterisieren die Gleichung und somit die Lösung!

- $\frac{T v_0}{L} = Sr$ heißt **Strouhal-Zahl**
- $\frac{p_0}{\rho_0 v_0^2} = \frac{\frac{p_0}{L}}{\rho_0 \frac{v_0^2}{L}} = \frac{\text{Druckkraftdichte}}{\text{Trägheitskraft}} = \frac{1}{Eu^2}$ Eu heißt **Euler-Zahl**
- $\frac{v_0^2}{F_0 L} = \frac{\rho_0 \frac{v_0^2}{L}}{\rho_0 F_0} = \frac{\text{Trägheitskraft}}{\text{Äußere Kraft}} = Fr$ heißt **Froude-Zahl**

$$\boxed{\frac{\rho_0 L v_0}{\eta} = \frac{\rho_0 \frac{v_0^2}{L}}{\eta \frac{v_0^2}{L^2}} = \frac{\text{Trägheitskraft}}{\text{Reibungskraft}} = Re} \quad \text{Reynolds-Zahl} \quad (2.137)$$

Für kleine Reynoldszahlen:

- $Re < Re_k$: laminare, geordnete Strömung
- $Re > Re_k$: turbulente Strömungen (mit Wirbeln und Geschwindigkeitsschwankungen)

Re_k bezeichnet die kritische Reynoldszahl. Für ein kreisförmiges Rohr ist $Re_k \approx 2000$.

Beispiel: *Wasser*

$$\rho_0(\text{H}_2\text{O}) \approx 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \quad \eta(\text{H}_2\text{O}) \approx 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$$

Für $L \approx 0,02 \text{ m} = 2 \text{ cm} \hat{=} \text{ Durchmesser des Rohrs}$

$$2000 = \frac{10^3 \cdot 0,02}{10^{-3}} \cdot v_{\text{krit}} \quad \Rightarrow \quad v_{\text{krit}} \approx 0,1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Reskalierte Navier-Stokes-Gleichung:

$$\frac{1}{St} \rho' \dot{v}'_i + \rho v'_j \nabla'_j v'_i = \frac{1}{Fr} \rho' F'_i - \frac{1}{Eu^2} \nabla'_i p' + \frac{1}{Re} \left(\Delta' v'_i + \frac{1}{3} \nabla'_i \nabla'_j v'_j \right) \quad (2.138)$$

Strömungen für identische Werte von Sr, Fr, Eu, Re sind ähnlich ($\hat{=}$ identisch modulo Skalenfaktoren). Deshalb sind diese Zahlen für Modellierungen sehr wichtig.

	$\eta[\text{Pa} \cdot \text{s}]$	$\rho_0[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}]$	$\nu = \frac{\eta}{\rho_0}$
Luft	10^{-5}	1	10^{-5}
Wasser	10^{-3}	10^3	10^{-6}
Öl	10^{-1}	900	10^{-4}
Glycerin	1	1260	10^{-3}

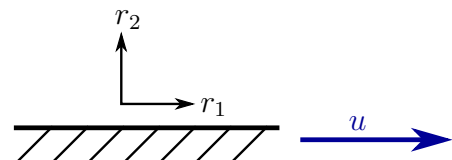
$\Rightarrow Re = \frac{Lv}{\nu}$: Bei Modellen von großen Objekten (Flugzeugen, Raketen, ...) ist Lv bei konstantem Re klein, also muss ν klein gewählt werden. Umgedreht: Bei der Modellierung von Bakterien mit $L \approx 10^{-6} \text{ m}$ und $v \approx 10^{-6} \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ist Lv groß und somit muss ν auch groß sein (z.B. Glycerin).

2.5.2 Grenzschichtphänomene

Bei den einfachsten Strömungsgeometrien (Couette, Hagen-Poiseuille) verschwindet der Inertialterm wegen der trivialen Geometrie komplett (Zeitableitung verschwindet wegen der Stationarität).

2.5.2.1 Impulsiv bewegte Platte

Betrachte eine viskose Flüssigkeit in der Region $0 < r_2 < \infty$ in Ruhe, $v(\vec{r}) = 0$. Bei $t = 0$ wird die (unendlich ausgedehnte) Platte instantan auf Geschwindigkeit u in r_1 -Richtung gebracht.



Wie ist das Geschwindigkeitsprofil?

$$\text{Annahme: } \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1(r_2, t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \nabla_i v_i = 0 \quad \left(\rightarrow \frac{d\rho}{dt} = 0 \right) \quad (2.139)$$

Betrachte $\rho = \rho_0 = \text{konst.}$

Navier-Stokes-Gleichung:

$$\dot{v}_i + v_j \nabla_j v_i = -\frac{1}{\rho_0} \nabla_i p + \frac{\eta}{\rho_0} \Delta v_i \quad (2.140)$$

$$\Rightarrow \dot{v}_1 = -\frac{1}{\rho_0} \nabla_1 p + \nu \Delta_2^2 v_1 \quad (2.141)$$

$$\nabla_2 p = v_3 p = 0 \quad (2.142)$$

p hängt also nur von r_1 und t ab.

$$\dot{v}_1(r_2, t) - \nu \Delta_2^2 v_1(r_2, t) = -\frac{1}{\rho_0} \nabla_1 p(r_1, t) = c(t) \quad (2.143)$$

Die Gleichung (2.143) separiert bezüglich r_1 und r_2 . Die rechte (und linke) Seite hängt nur von t ab.

$\Rightarrow \nabla_1 p(r_1, t)$ hängt nur von t ab! Da kein Druckgradient angelegt wird, ist $p(r_1 = -\infty) = p(r_1 = +\infty)$ und damit $\nabla_1 p = 0$.

$$\Rightarrow \text{Eindimensionale Diffusionsgleichung} \quad \boxed{\frac{\partial v_1(r_2, t)}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 v_1(r_2, t)}{\partial r_2^2}} \quad (2.144)$$

Randbedingungen:

- $v_1(r_2 > 0, t \leq 0) = 0$
- $v_1(r_2 = 0, t > 0) = u$ (Haftbedingung)
- $v_1(r_2 = +\infty, t > 0) = 0$

(Äquivalent zur Wärmeleitung durch einen Stab der zur Zeit $t = 0$ an einem Ende mit einem Wärmereservoir verbunden wird.)

2.5.2.2 Methoden der Ähnlichkeitslösung

Betrachte eine Koordinatenreskalierung ($\alpha \in \mathbb{R}$ ist eine numerische Konstante):

$$r = \alpha r' \quad t = \alpha^2 t'$$

\Rightarrow Die Gleichung bleibt invariant.

Dies legt nahe eine „Ähnlichkeitslösung“ als Funktion der Variablen $\frac{r}{t^{1/2}}$ zu suchen, da $\frac{r}{t^{1/2}} = \frac{r'}{t'^{1/2}}$ ebenfalls unabhängig von α ist. Tatsächlich wählt man $x = \frac{r}{(\nu t)^{1/2}}$ und setzt $v = f(x)$ als Lösung der Differentialgleichung an:

$$\boxed{\frac{\partial v}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 v}{\partial r^2}} \quad (2.145)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = f' \frac{\partial x}{\partial t} = f' \left(-\frac{1}{2t} \frac{r}{(\nu t)^{1/2}} \right) = -\frac{1}{2t} x f'(x) \quad (2.146)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} = \frac{\partial}{\partial r} \left(f' \frac{1}{(\nu t)^{1/2}} \right) = f'' \frac{1}{\partial t} \quad (2.147)$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2t} x f'(x) = \nu f''(x) \frac{1}{\nu t} \quad (2.148)$$

$$\Rightarrow \boxed{f''(x) + \frac{x}{2} f'(x) = 0} \quad (2.149)$$

Einmal integrieren:

$$f'(x) = A e^{-\frac{x^2}{4}} \quad (2.150)$$

Nochmal integrieren:

$$f(x) = B + A \int_0^x dy e^{-\frac{y^2}{4}} \quad (2.151)$$

Randbedingungen:

$$f(0) = u \quad \Rightarrow B = u \quad (2.152)$$

$$f(\infty) = 0 \quad \Rightarrow f(\infty) = u + A \int_0^\infty dy e^{-\frac{y^2}{4}} = u + A\sqrt{\pi} \stackrel{!}{=} 0 \quad (2.153)$$

$$\Rightarrow A = -\frac{u}{\sqrt{\pi}} \quad (2.154)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f(x) &= u \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\frac{y^2}{4}} dy \right) \\ &= u \left(1 - \text{Erf} \left(\frac{x}{2} \right) \right) \\ &= v(x) = v \left(\frac{r}{(\nu t)^{1/2}} \right) \end{aligned} \quad (2.155)$$

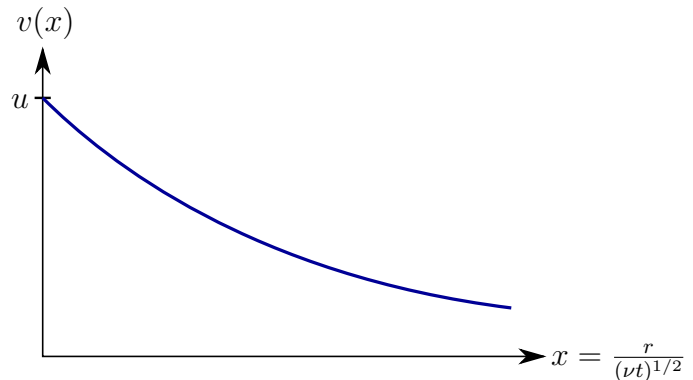
Die Errorfunktion $\text{Erf}(x)$ kann genähert werden:

$$\text{Erf}(x) = \begin{cases} \frac{2x}{\sqrt{\pi}} + \mathcal{O}(x^3) & \text{für } x \rightarrow 0 \\ 1 - \frac{e^{-x^2}}{x\sqrt{\pi}} & \text{für } x \rightarrow \infty \end{cases} \quad (2.156)$$

$$\Rightarrow v(x) = \begin{cases} u \left(1 - \frac{x}{\sqrt{\pi}} \right) & \text{für } x \rightarrow 0 \\ 2 \frac{ue^{-\frac{x^2}{4}}}{\sqrt{\pi x}} & \text{für } x \rightarrow \infty \end{cases} \quad (2.157)$$

Die Geschwindigkeitsprofile sind bezüglich der Zeit ähnlich, wenn die Ortskoordinate gemäß $x = \frac{r}{(\nu t)^{1/2}}$ reskaliert wird.

Die Bewegung der Platte hat sich nach einer Zeit t über eine Distanz $r \sim \sqrt{t\nu}$ ausgebreitet. Viskositätseffekte breiten sich also allmählich aus!



2.5.2.3 Wirbeldiffusion

Wirbeldichte:

$$\omega = \frac{1}{2} \vec{\nabla} \times \vec{v} = -\frac{1}{2} \nabla_2 v_1 = -\frac{1}{2} \frac{\partial v_1}{\partial r_2} \quad (2.158)$$

$$\boxed{\omega = \frac{u}{2\sqrt{\pi\nu t}} e^{-\frac{r^2}{4\nu t}}} \quad (2.159)$$

Die Wirbeldichte ist auf einen Bereich $r < \sqrt{\nu t}$ beschränkt und „diffundiert“ von der Wand weg. Im wirbelfreien Bereich ergibt sich eine Potentialströmung. Umgekehrt: Um die Strecke L zu diffundieren braucht die Wirbeldichte eine Zeit $t \sim \frac{L^2}{\nu}$ (viskose Diffusionszeit). Die Dicke $\delta = \sqrt{\nu t}$ heißt Grenzschicht-Dicke.

Beispiel: *Wasser*

$$\nu = 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$$

Nach 1 Sekunde: $\delta \approx 10^{-3} \text{ m}$

Nach 100 Sekunden: $\delta \approx 1 \text{ cm}$

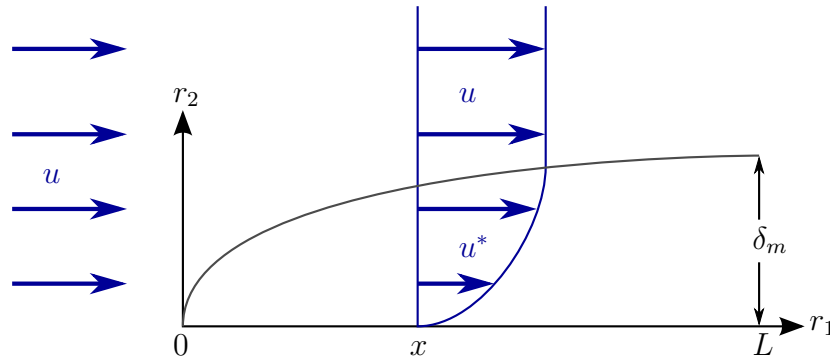
Nach 10^6 Sekunden (~ 10 Tage): $\delta \approx 1 \text{ m}$

2.5.2.4 Strömungen an einer Plattenkante

Man betrachte eine Strömung, die auf eine Plattenkante trifft. Eine exakte Rechnung ist möglich, wäre aber sehr lässlich. Deswegen betrachtet man ein einfaches „Skalenargument“:

Die Flüssigkeit im Abstand x von der Plattenkante hat „Plattenkontakt“ $t \sim \frac{x}{u}$. Da für eine unendlich ausgedehnte Platte die Grenzschichtdicke $\delta = \sqrt{\nu t}$ ist, gilt:

$$\boxed{\delta \sim \sqrt{\nu \frac{x}{u}}} \quad (2.160)$$



Für eine endliche Plattenlänge ist die maximale Grenzschichtdicke $\delta_m \sim \sqrt{\nu \frac{L}{u}}$. Wann ist $\delta_m \sim L$?

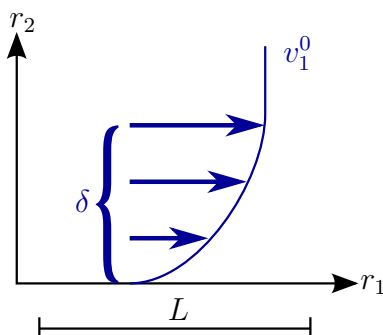
$$\begin{aligned} \delta_m < L &\Leftrightarrow \sqrt{\frac{\nu L}{u}} < L \\ &\Leftrightarrow \sqrt{\frac{uL}{\nu}} > 1 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{Re} > 1 \end{aligned}$$

Auto (Luft):	$\nu \approx 10^{-5} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$	$L \approx 1 \text{ m}$	$u \approx 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$	$Re \sim \frac{uL}{\nu} \sim 10^6$	$\rightarrow \delta_m \ll L$
Flugzeug (Luft):	$\nu \approx 10^{-5} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$	$L \approx 10 \text{ m}$	$u \approx 100 \frac{\text{m}}{\text{s}}$	$Re \sim \frac{uL}{\nu} \sim 10^8$	$\rightarrow \delta_m \ll L$
Schiff (Wasser):	$\nu \approx 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$	$L \approx 10 \text{ m}$	$u \approx 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$	$Re \sim \frac{uL}{\nu} \sim 10^8$	$\rightarrow \delta_m \ll L$

An diesen Beispielen sieht man sofort, wieso die Euler- und Bernoulli-Gleichung so erfolgreich sind!

2.5.2.5 Prandtlische Grenzschichttheorie

Außerhalb der Grenzschicht δ kann die Euler-Gleichung benutzt werden, innerhalb gilt die Navier-Stokes-Gleichung. Zudem gelten Anschlussbedingungen an der Grenzschicht-Grenze. In der Grenzschicht führen ein paar Vereinfachungen zur „Grenzschicht-Theorie“.



$$\begin{aligned} r_2 = \delta \quad v_1(r_2) = v_1^0 \quad r_2 = 0 \quad v_1 = v_2 = 0 \\ \Rightarrow \frac{\partial v_1}{\partial r_2} \approx \frac{v_1^0}{\delta} \quad \frac{\partial^2 v_1}{\partial r_2^2} \approx \frac{v_1^0}{\delta^2} \end{aligned}$$

Es folgen Skalenüberlegungen (nur zur Abschätzung, nicht als exakte Lösung).

$$v_1 \text{ und } p \text{ ändern sich nur wenig über die Systemgröße } L \Leftrightarrow \frac{\partial v_1}{\partial r_1} \approx \frac{v_1^0}{L} \quad \frac{\partial^2 v_1}{\partial r_1^2} \approx \frac{v_1^0}{L^2}$$

Für inkompressible Flüssigkeiten ($\nabla_i v_i = 0$) vereinfacht sich dies zu:

$$-\frac{\partial v_2}{\partial r_2} = \frac{\partial v_1}{\partial r_1} \approx \frac{v_1^0}{L} \quad (2.161)$$

Navier-Stokes-Gleichung:

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1 \nabla_1 v_1 + v_2 \nabla_2 v_1 = -\frac{1}{\rho} \nabla_1 p + \nu \underbrace{(\nabla_1^2 v_1 + \nabla_2^2 v_1)}_{=0} \quad (2.162)$$

$\nabla_1^2 v_1$ ist vernachlässigbar, da:

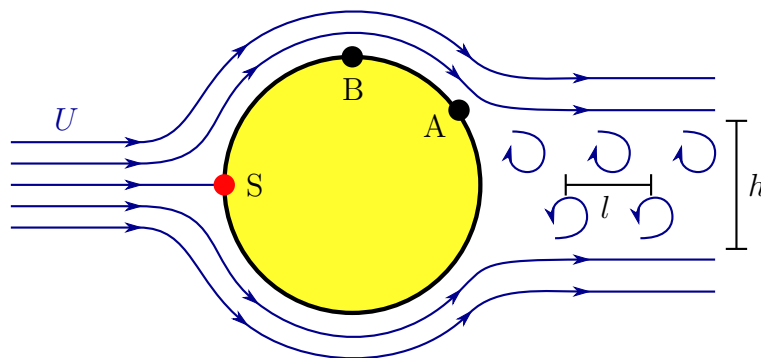
$$\frac{\nabla_2^2 v_1}{\nabla_1^2 v_1} \approx \frac{L^2}{\delta^2} \gg 1 \quad (2.163)$$

Dies ist für die meisten Anwendungen (für große Reynoldszahlen) gut erfüllt.

Philosophie:

$p(r_1)$ wird mit der Euler-Gleichung berechnet und als Randbedingung benutzt.

2.5.2.6 Effekte: Grenzschichtablösung



Von Punkt B nach A steigt der Druck an (aus Bernoulli-Gleichung). Die Grenzschicht löst sich am Punkt A ab und erzeugt einen Totwasserbereich mit $\langle v \rangle = 0$ und sorgt für Wirbelbildung. Oft bilden die abgelösten Wirbel eine „stabile“ alternierende Anordnung, die Karmansche Wirbelstraße genannt wird (mit dem universellem Verhältnis $\frac{k}{l} = 0,283$).

Dies ist auch die Ursache für das Summen von Stromkabeln und Antennen, für das Flattern von Fahnen etc.

2.5.2.7 Einfachste Grenzschichtablösung: Planare Geometrie, stationäres Feld

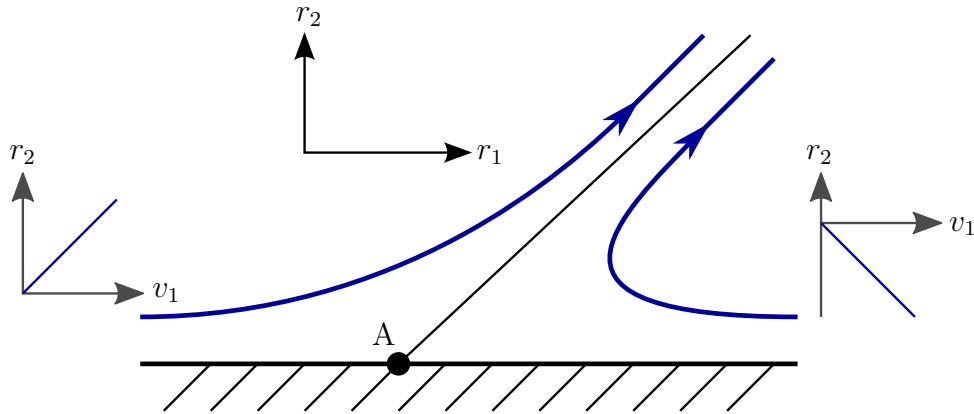


Abbildung 2.7: Strömung in der Nähe des Ablösepunkts A. Rechts und links davon sind die lokalen Strömungsprofile skizziert.

Der Ablösepunkt ist definiert durch: $\frac{\partial v_1}{\partial r_2} \Big|_{r_2=0} = 0$.

Grenzschicht-Gleichung (multipliziert mit ∇_2):

$$\nabla_2 \left(\frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1 \nabla_1 v_1 + v_2 \nabla_2 v_1 \right) = \nabla_2 \left(-\frac{1}{\rho} \nabla_1 p + \nu \nabla_2^2 v_1 \right)$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{(\nabla_2 v_1) \underbrace{\nabla_1 v_1}_{=0} + v_1 \nabla_1 \nabla_2 v_1 + (\nabla_2 v_2) \nabla_2 v_1 + v_2 \nabla_2^2 v_1}_{\nabla_i v_i = 0} = -\frac{1}{\rho} \underbrace{\nabla_1 \nabla_2 p}_{\nabla_2 p \approx 0}, \text{ da } v_2 \approx \frac{\delta}{L} v_1^0 \approx 0 + \nu \nabla_2^3 v_1$$

Multipliziert mit ∇_2 :

$$(\nabla_2 v_1) \nabla_1 \nabla_2 v_1 + \underbrace{v_1 \nabla_1 \nabla_2^2 v_1}_{=0} + \underbrace{(\nabla_2 v_2) \nabla_2^2 v_1}_{=0} + \underbrace{v_2 \nabla_2^3 v_1}_{=0} = \nu \nabla_2^4 v_1 \tag{2.164}$$

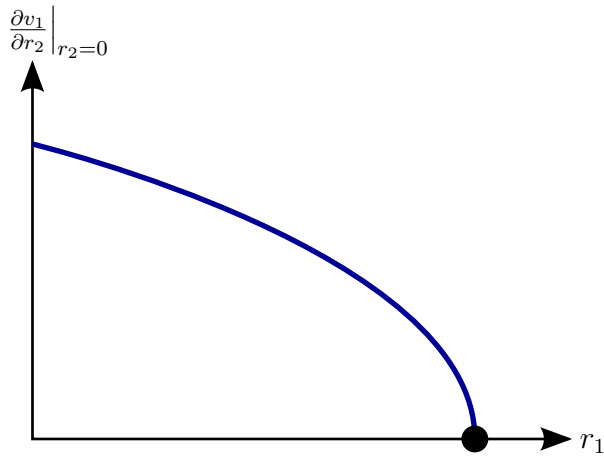
An der Oberfläche ($r_2 = 0$) ist $v_1 = v_2 = 0$ (Haftbedingung) und $\nabla_1 v_1 = 0$. Also:

$$(\nabla_2 v_1) \nabla_1 \nabla_2 v_1 = \nu \nabla_2^4 v_1 = \frac{1}{2} \nabla_1 (\nabla_2 v_1)^2 \tag{2.165}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{2} \frac{d}{dr_1} \left(\frac{\partial v_1}{\partial r_2} \right)^2 \Big|_{r_2=0} = \nu \frac{\partial^4 v_1}{\partial r_2^4} \Big|_{r_2=0} = \frac{b}{2} \leq 0} \tag{2.166}$$

Annahme:

$$\nu \frac{\partial^4 v_1}{\partial r_2^4} = +\frac{b}{2} + \dots \Rightarrow \left(\frac{\partial v_1}{\partial r_2} \right)^2 \Big|_{r_2=0} = a + br_1 \Rightarrow \frac{\partial v_1}{\partial r_2} = \sqrt{a + br_1}$$



Mit der Annahme $a, b \neq 0$ gibt es einen Ablösepunkt bei $r_1^{\text{Ab}} = -\frac{a}{b} \geq 0$ ($a > 0$). Die Konstanten a und b werden durch das Druckprofil aus der Euler-Gleichung bestimmt. Die komplette Lösung wurde 1970 entwickelt.