

Mechanik der Kontinua Blatt 5 - Rotierende Flüssigkeiten

<http://www.physik.tu-muenchen.de/lehrstuehle/T37/teaching.html>

Ausgabe 22.11.2010

1. **Stagnationspunkt:** Betrachten Sie eine gleichförmige Strömung $\vec{v} = v_0 \vec{e}_x$, der eine eben Wirbelströmung $\vec{v} = \vec{e}_\theta \Gamma / (2\pi r)$ mit $\Gamma = \text{const.}$ überlagert ist. Berechnen Sie die Koordinaten des Stagnationspunktes und skizzieren Sie die Stromlinien. Die Flüssigkeit sei ideal.
2. **Kaffeepause:** Nehmen Sie eine zylindrische Kaffeetasse mit Radius R und Höhe H und füllen Sie sie bis zur Höhe $h > H/2$. Versetzen Sie nun den Kaffee durch stetes Umrühren in Rotation, so dass das Geschwindigkeitsfeld durch $\vec{v} = \omega r \vec{e}_\theta$ (starre Rotation) gegeben ist. Die Winkelgeschwindigkeit ω sei konstant, der Kaffee inkompressibel und reibungsfrei.
 - a) Zeigen Sie, dass die Oberfläche beschrieben wird durch:

$$z = \frac{\omega^2 r^2}{2g} + z_0$$

mit $z_0 = h - \frac{\omega^2 R^2}{4g}$.

- b) Leiten Sie die maximale Winkelgeschwindigkeit her, die man erreichen kann, bevor der Kaffee überläuft.
 - c) Was passiert bei der kritischen Winkelgeschwindigkeit aus b), wenn die Tasse anfänglich weniger als halb voll war?
3. **Konforme Abbildungen in 2D:** Eine Abbildung zwischen zwei komplexen Ebenen sei gegeben durch $\tilde{z} = z^2$.
 - a) Konstruieren Sie die Abbildungen der beiden Geraden $x = a$ und $y = b$ sowie der Hyperbel $y = c/x$, wobei a , b und c reelle Konstanten sind und $z = x + iy$.
 - b) Eine Abbildung zwischen zwei komplexen Ebenen wird als konform im Punkt z_0 bezeichnet, wenn die Winkel zwischen zwei durch z_0 verlaufenden Kurven erhalten bleiben. Zeigen Sie, dass dies für die o.g. Abbildung gilt. Betrachten Sie hierzu den Schnittpunkt der beiden Geraden $x = a$ und $y = b$ und zeigen Sie, dass das Produkt der Ableitungen $d\tilde{x}/d\tilde{y}$ im Schnittpunkt -1 ergibt.