

Theoretische Physik II (Elektrodynamik) – Übungsblatt 2

Aufgabe 1 – Diracsche δ -Funktion

a) Sei x_i eine einfache Nullstelle von $f(x)$, mit $f(x_i) = 0$ und $f'(x_i) \neq 0$. Beweisen Sie die Relation:

$$\delta[f(x)] = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{|f'(x_i)|}.$$

b) Berechnen Sie nun mit Hilfe von a) die folgenden Integrale:

$$\int_0^{\infty} x^2 \delta[x^2 - 3x + 2] dx \quad \text{und} \quad \int_0^{\pi} \sin^3(\theta) \delta\left[\cos(\theta) - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right] d\theta.$$

c) Ausgehend von der dreidimensionalen δ -Funktion in kartesischen Koordinaten $\delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$ leiten Sie einen Ausdruck für die dreidimensionale δ -Funktion

(i) in Kugelkoordinaten,

(ii) in Zylinderkoordinaten

her. Stellen Sie sicher, dass Ihre Ergebnisse der Normierung $\int_V \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) d^3r = 1$ für $\vec{r}_0 \in V$ genügen.

Aufgabe 2 – Elektrostatische Potenziale

Berechnen Sie das elektrostatische Potenzial $\Phi(\vec{r})$ der folgenden Ladungsverteilungen. Lösen Sie dazu die Poisson-Gleichung in Koordinaten, die der Geometrie des Problems angepasst sind.

- Eine homogen geladene Hohlkugel der Gesamtladung Q um den Ursprung mit Innenradius R_1 und Außenradius R_2 .
- Eine geladene Hohlkugel um den Ursprung mit Innenradius R_1 und Außenradius R_2 , in der die Ladungsdichte nur vom Radius abhängt: $\rho(r) \sim r^{-2}$.
- Ein unendlich langer, homogen geladener Hohlzylinder um den Ursprung mit Innenradius R_1 und Außenradius R_2 . Die Ladung pro Längeneinheit sei Q .
- Zwei homogen geladene, unendlich ausgedehnte Ebenen parallel zur (x, y) -Ebene mit Abstand d und konstanten Flächenladungsdichten σ_1 und σ_2 .
- Eine Platte der Dicke $2Z_0$, die sich um die xy -Ebene zentriert zwischen $-Z_0$ und Z_0 befindet, in der die Ladungsdichte nur von z abhängt: $\rho(z) \sim z^2$.

Skizzieren Sie das elektrische Feld für die Teilprobleme a-e.

Aufgabe 3 – Quellen und Wirbel

Besitzen die folgenden Felder Quellen und/oder Wirbel? Skizzieren Sie die Felder

$$\vec{A}_1(\vec{r}) = x\hat{e}_z - z\hat{e}_x,$$

$$\vec{A}_2(\vec{r}) = x\hat{e}_z - y\hat{e}_x \text{ und}$$

$$\vec{A}_3(\vec{r}) = \frac{1}{1+x^2}\vec{r}.$$