Technische Universität München
Physik Department
Prof. Dr. Roland Netz
http://einrichtungen.physik.tu-muenchen.de/T37/teaching.html

Elektrodynamik
Wintersemester 2009/2010
20. Oktober 2009

Theoretische Physik II (Elektrodynamik) – Übungsblatt 1

Aufgabe 1 – **Vektoranalysis**

a) Zeigen Sie, dass für eine Funktion $f(\vec{r}) = f(r)$ (mit $r \equiv |\vec{r}|$) gilt:

$$\vec{\nabla} f(r) = \text{grad}\,(f(r)) = f'(r)\,\frac{\vec{r}}{r}, \tag{1}$$

$$\Delta f(r) = f''(r) + \frac{2}{r} f'(r)\,. \tag{2}$$

b) Zeigen Sie, dass für eine Funktion $f(\vec{r}) = \vec{a} \cdot \vec{r}$ (mit $\vec{a}$ als konstantem Vektor) gilt:

$$\text{grad}\,(f(\vec{r})) = \vec{a}, \tag{3}$$

$$\Delta f(\vec{r}) = 0. \tag{4}$$

Aufgabe 2 – **Differentialoperationen der Vektoranalysis**

Verifizieren Sie folgende Formeln, wobei $f(\vec{r})$ und $g(\vec{r})$ skalare Felder, und $\vec{F}(\vec{r})$ und $\vec{G}(\vec{r})$ Vektorfelder sind:

a) Produktformeln:

$$\text{grad}\,(fg) = f\,\text{grad}\,(g) + g\,\text{grad}\,(f)\,, \tag{5}$$

$$\text{div}\left(f\vec{G}\right) = f\,\text{div}\left(\vec{G}\right) + \vec{G} \cdot \text{grad}\,(f)\,, \tag{6}$$

$$\text{div}\left(\vec{F} \times \vec{G}\right) = \vec{G} \cdot \text{rot}\left(\vec{F}\right) - \vec{F} \cdot \text{rot}\left(\vec{G}\right), \tag{7}$$

$$\text{rot}\left(f\vec{G}\right) = f\,\text{rot}\left(\vec{G}\right) - \vec{G} \times \text{grad}\,(f)\,, \tag{8}$$

$$\text{rot}\left(\vec{F} \times \vec{G}\right) = \left(\vec{G} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{F} - \left(\vec{F} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{G} + \vec{F}\,\text{div}\left(\vec{G}\right) - \vec{G}\,\text{div}\left(\vec{F}\right), \tag{9}$$

$$\text{grad}\left(\vec{F} \cdot \vec{G}\right) = \left(\vec{F} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{G} + \left(\vec{G} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{F} + \vec{F} \times\ \text{rot}\left(\vec{G}\right) + \vec{G} \times\ \text{rot}\left(\vec{F}\right). \tag{10}$$

b) Nützliche Identitäten:

$$\text{rot}\left(\text{rot}\left(\vec{F}\right)\right) = \text{grad}\left(\text{div}\left(\vec{F}\right)\right) - \Delta\vec{F}, \tag{11}$$

$$\text{rot}\,(\text{grad}\,(f)) = \vec{0}, \tag{12}$$

$$\text{div}\,(\text{rot}\,(F)) = 0, \tag{13}$$

$$\text{rot}\,(\vec{a} \times \text{grad}\,(f)) = \vec{a}\,\Delta f - \text{grad}\,(\vec{a} \cdot \text{grad}\,(f))\,, \tag{14}$$

mit $\vec{a}$ als konstantem Vektor.

– bitte wenden –

Aufgabe 3 – **Linienintegrale**

Gegeben sei die Funktion $f(\vec{r}) = x^2 z + 4xy + 2yz^3$ und die Punkte $\vec{a} = (1, 0, 0)$ und $\vec{b} = (0, 0, 1)$. Berechnen Sie das Integral:

$$\int_a^b \vec{\nabla} f(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{r} \tag{15}$$

längs **zweier verschiedener** Pfade zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$. Ist das Ergebnis wegabhängig ist? Berechnen Sie zusätzlich $f\left(\vec{b}\right) - f(\vec{a})$.

Aufgabe 4 – **Satz von Gauss**

Berechnen Sie die Integrale

$$\int \vec{\nabla} \cdot \vec{A}\, \mathrm{d}^3 r \quad \text{und} \quad \int \vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{\sigma} \tag{16}$$

für die Funktion $\vec{A}(\vec{r}) = x^2 \hat{e}_x + 2yz\hat{e}_y + 3xz\hat{e}_z$. Das Integrationsvolumen sei ein Würfel mit Kantenlänge 1 mit den Eckpunkten $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$ und $(1, 1, 1)$.

Aufgabe 5 – **Satz von Stokes**

Berechnen Sie die Integrale

$$\int \left(\vec{\nabla} \times \vec{A}\right) \cdot \mathrm{d}\vec{\sigma} \quad \text{und} \quad \int \vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{r} \tag{17}$$

für die Funktion $\vec{A}(\vec{r}) = x^2 y^2 \hat{e}_x + 2yz\hat{e}_y + 3xz\hat{e}_z$. Die Integrationsfläche sei eine Kreisscheibe in der x-y-Ebene mit Radiuslänge 1 und dem Mittelpunkt im Ursprung.