Zentralübung zur Vorlesung

Theoretische Physik II: Elektrodynamik

Blatt 7 (Lösungen) Dr. A.Zharikov, Prof. R.Netz, TU München, WS 2009/2010

Aufgabe 16: Lorentz-Kontraktion, Zeitdilatation

Ein Stab, der in Ruhe die Länge L besitzt, fliegt an Ihnen mit der Geschwindigkeit v in Richtung seiner Ausdehnung vorbei.

(a) Wie lange dauert es, bis er an Ihnen vorbei ist?

$$\Delta t = \frac{L}{\gamma v} \quad (L/\gamma - \text{Lorentz-Kontraktion})$$

(b) Wie lange dauert dieser Vorgang im Ruhesystem des Stabes?

$$\Delta t' = \frac{L}{v}$$

Alternative: $\Delta X = (c\Delta t, 0, 0, 0)$ im System des Beobachters. $\Delta X' = (c\Delta t', -L, 0, 0)$ im System des Stabes. Lorentz-Transformation:

$$c\Delta t' = \gamma(c\Delta t - \beta * 0), \ -L = \gamma(0 - \beta c\Delta t) \Rightarrow (a), (b)$$

(c) $\frac{\Delta t'}{\Delta t} = \gamma > 1$

(d) Ist das Ergebnis verträglich mit der Zeitdilatation und, wenn ja, wieso?
Ja.
Zeitdilatation: Das Zeitinterval zwischen zwei zeitartig getrennten Ereignissen ist minimal im Bezugssystem, in dem diese Ereignisse am gleichen Ort passieren ($\Delta\vec{r} = 0$).
Beweis: Für alle Inertialsysteme gilt:

$$s_{12}^2 = c^2(\Delta t^{(S)})^2 - |\Delta\vec{r}^{(S)}|^2 = const > 0 \Rightarrow \ c^2(\Delta t^{(S)})^2 = const + |\Delta\vec{r}^{(S)}|^2$$

$$\Rightarrow \ (\Delta t^{(S)})^2 = (\Delta t)^2_{min} \text{ falls } |\Delta\vec{r}^{(S)}|^2 = 0$$

In unserem Fall ist es das System des Beobachters.

Aufgabe 17. Bewegte Ladung

Eine Ladung Q bewege sich mit konstanter Geschwindigkeit $\vec{v} = v\hat{e}_x$. Bestimmen Sie das elektrische Potential $\Phi(\vec{r}, t)$ und das Vektorpotential $\vec{A}(\vec{r}, t)$

(a) Siehe Aufgabe 15 ($\varepsilon = 1, \mu = 1$).

$$\Phi(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{\sqrt{(x - vt)^2 + (1 - v^2/c_0^2)(y^2 + z^2)}}$$

$$A_x = \frac{v}{c_0^2}\Phi, \quad A_y = 0, \quad A_z = 0$$

(b) Im Ruhesystem der Ladung K' gilt:

$$\Phi'(\vec{r}', t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}, \quad \vec{A}'(\vec{r}', t) = \vec{0}$$

$A^\mu = (\Phi/c_0, \vec{A})^T$ ist ein Vierer-Vektor. Im Laborsystem K bekommt man mittels Lorentz-Transformation:

$$\Phi/c_0 = \gamma(\Phi'/c_0 + \beta * 0) = \gamma/c_0 \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}},$$

$$A_x = \gamma(0 + \beta\Phi'/c_0) = \frac{v}{c_0^2}\Phi, \quad A_y = 0, \quad A_z = 0$$

Unter Annahme $K' = K$ für $t = t' = 0$ folgt

$$x' = \gamma(x - \beta c_0 t) = \gamma(x - vt), \quad y' = y, \quad z' = z$$

$$\Phi(x, y, z, t) = \gamma \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{\sqrt{\gamma^2(x - vt)^2 + y^2 + z^2}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{\sqrt{(x - vt)^2 + (1 - v^2/c_0^2)(y^2 + z^2)}}$$

Bemerkung; Lorentz-Transformation eines Vierer-Vektors X^μ (K' bewegt sich in x-Richtung)

$$\left\{ \begin{array}{lcl} X'^{\,0} &=& \gamma(X^0 - \beta X^1) \\ X'^{\,1} &=& \gamma(X^1 - \beta X^0) \\ X'^{\,2} &=& X^2 \\ X'^{\,3} &=& X^3, \end{array} \right. \quad \text{mit} \quad \left\{ \begin{array}{lcl} \gamma &=& 1/\sqrt{1 - \beta^2}, \\ \beta &=& v/c_0 \end{array} \right.$$