Zentralübung zur Vorlesung

Theoretische Physik II: Elektrodynamik

Blatt 6 (Lösungen) Dr. A.Zharikov, Prof. R.Netz, TU München, WS 2009/2010

Aufgabe 13: Elektrische und magnetische Dipolstrahlung

Strahlung einer lokalisierten, harmonisch oszillierenden Quelle im Vakuum:

$$\rho(\vec{r},t) = \rho_0(\vec{r})e^{-i\omega t}, \quad \vec{j}(\vec{r},t) = \vec{j}_0(\vec{r})e^{-i\omega t}, \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{j}_0 = i\omega\rho_0$$

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{j}(\vec{r}', t - |\vec{r}-\vec{r}'|/c_0)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\,\mathrm{d}^3r' = \frac{\mu_0}{4\pi}e^{-i\omega t}\int \vec{j}_0(\vec{r}')\frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\,\mathrm{d}^3r'$$

Man betrachtet den Fall, wenn die Stromverteilung auf ein Gebiet einer charakteristischen Länge d beschränkt ist, das gegenüber der auftretenden Wellenlänge $\lambda = 2\pi/k$ klein ist ($d \ll \lambda$). In der Nahzone ($d \ll r \ll \lambda$) sind die Felder quasistatinär, d.h. sie oszillieren mit $e^{-i\omega t}$ sind aber im übrigen statisch ($k|\vec{r}-\vec{r}'| \approx 0$).

In der Strahlungszone (Fernzone) ($d \ll \lambda \ll r$) berechnet man die in führender Ordnung mit $1/r$ abfallenden Potentiale und Felder. Mit

$$k|\vec{r}-\vec{r}'| = \vec{k}\cdot\vec{r} - \vec{k}\cdot\vec{r}' + O(1/kr), \quad \vec{k} = k\hat{\epsilon}_r, \quad k = \frac{\omega}{c_0}$$

sind das Vektorpotential

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \vec{A}_0\,\frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}-i\omega t}}{r} + o(1/r), \quad \vec{A}_0 = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \vec{j}_0(\vec{r}')e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}'}\mathrm{d}^3r' + o(1/r)$$

und die Felder

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \vec{\nabla}\times\vec{A} = i(\vec{k}\times\vec{A}_0)\,\frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}-i\omega t}}{r} + o(1/r)$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{H} = \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} = -i\varepsilon_0\omega\vec{E} \Rightarrow \quad \vec{E}(\vec{r},t) = -\frac{c_0^2}{\omega}(\vec{k}\times\vec{B}(\vec{r},t)) + o(1/r)$$

$$\Rightarrow \vec{E}(\vec{r},t) = -i\frac{c_0^2}{\omega}\vec{k}\times(\vec{k}\times\vec{A}_0)\,\frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}-i\omega t}}{r}$$

Entwicklung von $\vec{A}_0(kr' \ll 1)$:

$$\vec{A}_0 \approx \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\int \vec{j}_0(r')\mathrm{d}^3r' - i\int \vec{j}_0(r')(\vec{k}\cdot\vec{r}')\mathrm{d}^3r'\right) =$$

$$\frac{\mu_0}{4\pi}\int \vec{j}_0(r')\,\mathrm{d}^3r' - i\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{2}\int(\vec{r}'\times\vec{j}_0(\vec{r}'))\times\vec{k}\,d^3r' - i\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{2}\int\left[(\vec{k}\cdot\vec{r}')\vec{j}_0 + (\vec{k}\cdot\vec{j}_0)\vec{r}'\right]\,\mathrm{d}^3r'$$

Der erste Term entspricht der elektrische Dipolstrahlung , der zweite der magnetische Dipolstrahlung und der dritte der elektrische Quadrupolestrahlung.

(a) Elektrische Dipolstrahlung:

$$\vec{A}_0^{E1} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \vec{j}_0(r')\,\mathrm{d}^3r' = -\frac{\mu_0}{4\pi}\int \vec{r}'(\vec{\nabla}\cdot\vec{j}_0)d^3r' = -i\frac{\mu_0}{4\pi}\omega\int \vec{r}'\rho_0(\vec{r}')d^3r' = -i\omega\vec{p}_0\frac{\mu_0}{4\pi}$$

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi c_0}\omega^2(\hat{e}_r\times\vec{p}_0)\,\frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}-i\omega t}}{r}$$

$$\vec{E}(\vec{r},t) = -\frac{\mu_0}{4\pi}\omega^2\hat{e}_r\times(\hat{e}_r\times\vec{p}_0)\,\frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}-i\omega t}}{r}$$

Der Poynting-Vektor:

$$\mu_0\overline{\vec{S}} = \overline{Re(\vec{E})\times Re(\vec{B})} = \frac{1}{4}\overline{(\vec{E}+\vec{E}^*)\times(\vec{B}+\vec{B}^*)} = \frac{1}{4}(\vec{E}\times\vec{B}^*+\vec{E}^*\times\vec{B}) = \frac{1}{2}Re(\vec{E}\times\vec{B}^*)$$

$$2\mu_0\hat{e}_r\cdot\overline{\vec{S}} = Re(\vec{E}\cdot(\vec{B}^*\times\hat{e}_r)) = Re(\vec{B}^*\cdot(\hat{e}_r\times\vec{E}))$$

Die in das Raumwinkelelement ($d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$) abgestrahlte Leistung:

$$\frac{dP}{d\Omega} = r^2\hat{e}_r\cdot\overline{\vec{S}} = \frac{1}{2\mu_0}\frac{\mu_0^2}{(4\pi)^2c_0}\omega^4|(\hat{e}_r\times\vec{p}_0)|^2 = \frac{\mu_0}{32\pi^2c_0}\omega^4|(\hat{e}_r\times\vec{p}_0)|^2$$

Die abgestrahlte Leistung:

$$P = \int\frac{dP}{d\Omega}d\Omega = \frac{\mu_0}{12\pi c_0}\omega^4|\vec{p}_0|^2$$

(b) Magnetische Dipolstrahlung:

$$\vec{A}_0^{M1} = -i\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{2}\int(\vec{r}'\times\vec{j}_0(r'))\times\vec{k}\,\mathrm{d}^3r' = i\frac{\mu_0}{4\pi}\vec{k}\times\vec{m}_0$$

$$\vec{B}(\vec{r},t) = -\frac{\mu_0}{4\pi c_0^2}\omega^2\hat{e}_r\times(\hat{e}_r\times\vec{m}_0)\,\frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}-i\omega t}}{r}$$

$$\vec{E}(\vec{r},t) = -\frac{\mu_0}{4\pi c}\omega^2(\hat{e}_r\times\vec{m}_0)\,\frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}-i\omega t}}{r}$$

Analog zu A1(a):

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{\mu_0}{32\pi^2c_0^3}\omega^4|(\hat{e}_r\times\vec{m}_0)|^2$$

Die abgestrahlte Leistung:

$$P = \frac{\mu_0}{12\pi c_0^3}\omega^4|\vec{m}_0|^2$$

Aufgabe 14. Zeitlich periodische Ladungsdichten

Nehmen wir an, dass die Ladungsverteilung mit Winkelgeschwindigkeit $\omega_0\hat{e}_z$ rotiert. Dann ist die zeitabhängige Ladungsdichte im Laborsystem gegeben durch

$$\rho(\vec{r},t) = \rho(r,\theta,\phi-\omega_0 t).$$

Das Ziel ist die Berechnung der Multipolmomente, die in Formeln für die Strahlung stehen.

(a) Z.B. Dipolmoment:

$$\vec{p}(0) = \int \vec{r}' \rho(\vec{r}', t = 0)\, \mathrm{d}^3 r', \quad p_\perp = \sqrt{p_x^2(0) + p_y^2(0)}, \quad \tan \varphi_0 = p_x(0)/p_y(0)$$

Rotation um die z-Achse:

$$p_z = p_z(0) = const, \quad p_x(t) = p_\perp \cos(\omega t + \varphi_0) = Re(p_\perp e^{-i\varphi_0} e^{-i\omega t}),$$

$$, \quad p_y(t) = p_\perp \sin(\omega t + \varphi_0) = Re(i p_\perp e^{-i\varphi_0} e^{-i\omega t})$$

Das Dipolmoment $\vec{p}_0$ für elektrische Dipolstrahlung ist:

$$\vec{p}_0 = (1, i, 0)^T p_\perp e^{-i\varphi_0}, \qquad \omega = \omega_0$$

Die Komponenten des Dipols haben unterschiedliche Phasen!

(b) Die Fourier-Entwicklung der Ladungsdichte $\rho(\vec{r}, t)$ lautet (beachte: es gibt symmetrische Definitionen für Fourier-Reihen)

$$\rho(\vec{r}, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(\vec{r}) e^{-in\omega_0 t}$$

mit

$$c_n(\vec{r}) = \frac{1}{T} \int_0^T e^{in\omega_0 t} \rho(\vec{r}, t) dt.$$

Da $\rho(r, t) = \rho^*(r, t)$ folgt

$$c_{-n}(\vec{r}) = c_n^*(\vec{r}), \quad \rho(\vec{r}, t) = c_0(\vec{r}) + \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Re}[2 c_n(\vec{r}) e^{-in\omega_0 t}].$$

(c) Die Methode (a)

Monopolmoment:

Kartesisch: $Q = q$. Da Q konstant ist, ist die Frequenz des Monopolmoments Null. Monopolmomente tauchen nicht in Strahlungsproblemen auf.

Dipolmoment:

Siehe A2(a) : $p_\perp = qR$, Elektrische Dipolstrahlung mit der Frequenz ω_0.

Monopol- und Dipolmoment mit der Methode aus Aufgabe (b). Die Ladungsdichte ist

$$\rho(\vec{r}, t) = \frac{q}{R} \delta(r - R) \delta(z) \delta(\varphi - \varphi_0 - \omega_0 t).$$

Frequenz Null ($n = 0$):

$$\rho_0(\vec{r}) = c_0 = \frac{1}{T} \int_0^T \rho(\vec{r}, t) dt = \frac{q}{2\pi} \frac{\delta(r - R)}{R} \delta(z).$$

ρ_0 hat Kartesisches Monopol $Q = q$.

n**-te harmonische Frequenz:**

$$2c_n(\vec{r}) = \frac{2}{T}\int_0^T \rho(\vec{r},t)e^{in\omega_0 t}dt = \frac{q}{\pi}\frac{\delta(r-R)}{R}\delta(z)e^{in(\varphi-\varphi_0)}. \tag{1}$$

Für das Dipolmoment folgt

$$\begin{aligned}
p_x &= \frac{q}{\pi}e^{-in\varphi_0}\int r\cos\varphi\frac{\delta(r-R)}{R}\delta(z)e^{in\varphi}rdrdzd\varphi \;=\; qRe^{-i\varphi_0}\delta_{n1}\\
p_y &= \frac{q}{\pi}e^{-in\varphi_0}\int r\sin\varphi\frac{\delta(r-R)}{R}\delta(z)e^{in\varphi}rdrdzd\varphi \;=\; iqRe^{-i\varphi_0}\delta_{n1}\\
p_z &= 0
\end{aligned}$$

Quadrupolmoment:

$$Q_{ij} \sim x_i(t)x_j(t) \sim cos(\omega_0 t+\alpha)cos(\omega_0 t+\beta) \sim e^{-i2\omega_0 t}$$

Quadrupolstrahlung kann man bei der Frequenz $2\omega_0$ beobachten. Es gibt auch konstante Terme, z.B. $Q_{zz} = qz^2(t) - (q/3)(x^2(t)+y^2(t)+z^2(t)) = -qR^2/3$, die keine Strahlung geben.

Aufgabe 15. Čerenkov-Strahlung

Eine Ladung Q bewege sich mit konstanter Geschwindigkeit $\vec{v} = v\hat{e}_x$ in einem Medium mit reellem Brechungsindex $n > 1$. Zeigen Sie, dass im Fall $v > c = c_0/n$, d.h. die Geschwindigkeit des Teilchens ist größer als die Lichtgeschwindigkeit c im Medium, auch ein gleichförmig bewegtes Teilchen Strahlung aussendet und berechnen Sie den Öffnungswinkel θ_C des Mach'schen Kegel der resultierenden elektromagnetischen Schockwelle.

Lösung

Retardierte Lienhard- Wiechert-Potentiale in einem isotropen Medium mit konstanten ε, μ lauten:

$$\Phi(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\int \frac{\rho(\vec{r}',t-|\vec{r}-\vec{r}'|/c)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\,\mathrm{d}^3r', \quad \vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{j}(\vec{r}',t-|\vec{r}-\vec{r}'|/c)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\,\mathrm{d}^3r'$$

Im Falle

$$\rho(\vec{r},t) = Q\,\delta(x-vt)\,\delta(y)\,\delta(z), \quad \vec{j}(\vec{r},t) = v\hat{e}_x\rho(\vec{r},t)$$

gilt:

$$\vec{A} = \hat{e}_x\frac{v}{c^2}\Phi$$

$$4\pi\varepsilon\varepsilon_0\Phi/Q = \int dx'\int\int dy'\,dz'\,\delta(y')\,\delta(z')\frac{\delta(x'-v(t-\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}/c))}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}$$

$$\overset{s^2=y^2+z^2,\,\tilde{x}=x'-x}{=} \int dx'\frac{\delta(\tilde{x}+v/c\sqrt{s^2+\tilde{x}^2}-(vt-x))}{\sqrt{s^2+\tilde{x}^2}} = \sum_i \frac{1}{\sqrt{s^2+\tilde{x}_i{}^2}\,|f'(\tilde{x}_i)|}$$

Die Summation läuft über <u>reellen</u> Nullstellen der Funktion $f(\tilde{x})$:

$$f(\tilde{x}) = \tilde{x} + \frac{v}{c}\sqrt{s^2 + \tilde{x}^2} - (vt - x), \quad f(\tilde{x}_i) = 0, \quad f'(\tilde{x}_i) = 1 + \frac{v}{c}\frac{\tilde{x}_i}{\sqrt{s^2 + \tilde{x}_i{}^2}}$$

Man beweise die folgende Identität:

$$(\sqrt{s^2 + \tilde{x}_i{}^2}\,|f'(\tilde{x}_i)|)^2 \overset{f(x_i)=0}{=} (vt - x)^2 + (1 - \frac{v^2}{c^2})\,s^2$$

$$\Rightarrow \quad \Phi(\vec{r}, t) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0\sqrt{(vt - x)^2 + (1 - \frac{v^2}{c^2})\,s^2}}\,N,$$

wobei N die Anzahl der reellen Nullstellen ist.
Man zeige graphisch oder analytisch, dass

$$N = 1 \quad (\text{für } \frac{v}{c} < 1) \quad \text{und}$$

$$N = 2\theta(vt - x - (v^2/c^2 - 1)^{1/2}\,s) \quad (\text{für } \frac{v}{c} > 1)$$

Im Falle $\frac{v}{c} > 1$ bildet sich eine Schockwelle. Die Fronte der Schockwelle ist durch die Gleichung

$$vt - x - (v^2/c^2 - 1)^{1/2}\,\sqrt{(y^2 + z^2)} = 0$$

gegeben. Eine Senkrechte zur Fronte (der Ausbreitungsvektor der Welle) bildet den Winkel θ_C ($cos\theta_C = c/v$) mit der x-Achse.