Zentralübung zur Vorlesung

Theoretische Physik II: Elektrodynamik

Blatt 5 (Lösungen) Dr. A.Zharikov, Prof. R.Netz, TU München, WS 2009/2010

Aufgabe 11: Maxwell'scher Spannungstensor

(a) Betrachten Sie einen unendlich großen Plattenkondensator mit der Oberflächenladungsdichte $-\sigma$ auf der unteren Platte und σ auf der oberen Platte. Der Abstand zwischen den Platten sei d.

(**1**) Berechnen Sie den Spannugstensor und die Kraft pro Flächeneinheit, die auf die obere Platte wirkt.

(**2**) Bestimmen Sie diese Kraft alternativ durch die Berechnung des Feldes, das die untere Platte erzeugt.

(b) Betrachten Sie eine Hohlkugel mit der Oberflächenladungsdichte σ_1 auf der unteren Hälfte und σ_2 af der oberen Hälfte. Bestimmen Sie die Kraft, die von der unteren Hälfte der Kugel auf ihre obere Hälfte ausgeübt wird.

Hinweis: Betrachten Sie zuerst den Fall $\sigma_1 = \sigma_2$.

Lösung (zusammengefaßt von Tobias Ried)

Allgemein ist der Spannungstensor definiert über

$$T_{ij} = E_i D_j + H_i B_j - \frac{1}{2}\delta_{ij}(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D} + \boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{B}) \tag{1}$$

Der Impulssatz lässt sich damit in differentieller Form schreiben als

$$\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{p_{mech}} + \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{p_{em}} = \mathrm{div}\hat{\boldsymbol{T}} \tag{2}$$

und

$$\boldsymbol{p_{em}} = \boldsymbol{D}\times\boldsymbol{B} \tag{3}$$

Die Integraldarstellung ergibt sich aus gliedweiser Integration über ein Raumgebiet V unter Anwendung des Satzes von Gauss

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{P_{mech}} + \frac{d}{dt}\boldsymbol{P_{em}} = \int_V \mathrm{d}^3 r\,\mathrm{div}\hat{\boldsymbol{T}} = \oint_{\partial V}\hat{\boldsymbol{T}}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S \tag{4}$$

wobei

$$\boldsymbol{P_{em}} = \int_V \mathrm{d}^3 r\,\boldsymbol{D}\times\boldsymbol{B} \tag{5}$$

Betrachtet werde nun ein unendlich ausgedehnter Plattenkondensator mit der Oberflächenladungsdichte $-\sigma$ auf der unteren Platte und σ auf der oberen Platte und Plattenabstand d.

Das Feld im Innern des Kondensator ist bekanntlich

$$\boldsymbol{E} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0}\boldsymbol{e_z} = \boldsymbol{E_\sigma} + \boldsymbol{E_{-\sigma}} \qquad \text{wobei} \qquad \boldsymbol{E_{-\sigma}} = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\boldsymbol{e_z} \tag{6}$$

Die Kraft auf ein Flächenstück S der oberen Platte ergibt sich damit aus

$$\boldsymbol{F} = Q(S)\boldsymbol{E_{-\sigma}} = \sigma S\Big(-\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\boldsymbol{e_z}\Big) = -\frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}\boldsymbol{e_z}S \tag{7}$$

Die Kraft pro Flächeneinheit auf die obere Platte ist also

$$\frac{\boldsymbol{F}}{S} = -\frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}\boldsymbol{e_z} \tag{8}$$

Alternativ soll diese mithilfe des Spannungstensors berechnet werden. Berücksichtigt man, dass es in dieser einfachen Anordnung keine Magnetfelder gibt, erhält man

$$T_{ij} = \epsilon_0\frac{\sigma^2}{\epsilon_0^2}\begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{\epsilon_0^2}\epsilon_0\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}\begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \tag{9}$$

im Innern des Plattenkondensators ($0 < z < d$). Für $z < 0$ und $z > d$ ist $T_{ij} = 0$, da hier keine Felder vorhanden sind. Die Kraft auf ein Flächenstück S berechnet man, indem man den Impulssatz auf ein quaderförmiges Volumen anwendet, das einen Ausschnitt der oberen Platte infinitesimal umschließt. Die Oberseite dieses Volumens werde mit "+", die Unterseite mit "-" notiert. Da die Felder statisch sind, liefert die Impulserhaltung

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{F} &= \oint_{\partial V}\hat{\boldsymbol{T}}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S = \oint_{\partial V_+}\boldsymbol{0}\cdot\boldsymbol{n}_+\mathrm{d}S + \oint_{\partial V_-}\hat{\boldsymbol{T}}\cdot\boldsymbol{n}_-\mathrm{d}S \\
&= \hat{\boldsymbol{T}}\cdot\boldsymbol{n}_-S = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}\begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}S = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}S \\
&= -\frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}S\boldsymbol{e_z}
\end{aligned} \tag{10}$$

Die Kraft pro Flächeneinheit ist also wieder

$$\frac{\boldsymbol{F}}{S} = -\frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}\boldsymbol{e_z} \tag{11}$$

Der Vorteil des Spannungstensors wird deutlich, wenn man eine Hohlkugel mit der Oberflächenladungsdichte σ betrachtet. Bestimmt werden soll nun die Kraft, die von der unteren Hälfte der Kugel auf die obere ausgeübt wird. Das elektrische Feld der Kugel ist

$$\boldsymbol{E} = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\boldsymbol{e_r} & (r > R) \\ 0 & (r < R) \end{cases} \tag{12}$$

mit $Q = 4\pi R^2\sigma$. Man wähle sich nach obiger Konvention ein Volumen, das die obere Kugelschale infinitesimal umschließt. Die Kraft ist dann

$$\boldsymbol{F} = \int_{\partial V} \hat{\boldsymbol{T}} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}S = \int_{\partial V_-} \boldsymbol{0} \cdot \boldsymbol{n}_- \mathrm{d}S + \int_{\partial V_+} \hat{\boldsymbol{T}} \cdot \boldsymbol{n}_+ \mathrm{d}S \tag{13}$$

Vor dem Ausführen der Integration soll noch einmal der Spannungstensor näher betrachtet werden. Dieser lässt sich mithilfe der Matrixmultiplikation schreiben als

$$\hat{\boldsymbol{T}} = \boldsymbol{E}\boldsymbol{D}^{\boldsymbol{T}} + \boldsymbol{H}\boldsymbol{B}^{\boldsymbol{T}} - \frac{1}{2}\hat{\boldsymbol{1}}(\boldsymbol{E}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{D} + \boldsymbol{H}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{B}) \tag{14}$$

Schreibt man ausführlich $(H, B = 0)$

$$\hat{\boldsymbol{T}} \cdot \boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_1 & D_2 & D_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} E_1 & E_2 & E_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \tag{15}$$

lässt sich dies interpretieren als

$$\hat{\boldsymbol{T}} \cdot \boldsymbol{n} = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{n}) - \frac{1}{2}\boldsymbol{n}(\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{D}) \tag{16}$$

(*allgemein* $\hat{\boldsymbol{T}} \cdot \boldsymbol{n} = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{n}) - \frac{1}{2}\boldsymbol{n}(\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{D}) + \boldsymbol{H}(\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{n}) - \frac{1}{2}\boldsymbol{n}(\boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{B})$)

Davon ausgehend berechnet man nun

$$\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{D}\Big|_{r=R+0} = \epsilon_0 \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{E} = \epsilon_0 E^2 = \frac{\epsilon_0 Q^2}{(4\pi\epsilon_0 R^2)^2} \tag{17}$$

und

$$\boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{n} = \epsilon_0 \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{n} = \frac{\epsilon_0 Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \tag{18}$$

Damit ist die Kraft auf die obere Kugelhälfte

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{F} &= \frac{\epsilon_0 Q^2}{(4\pi\epsilon_0 R^2)^2} \int_{\partial V_+} \Big(\boldsymbol{n} - \frac{1}{2}\boldsymbol{n}\Big) \mathrm{d}S = \frac{\epsilon_0 Q^2}{2(4\pi\epsilon_0 R^2)^2} \int_{\partial V_+} \boldsymbol{e_r} \mathrm{d}S \\
&= \alpha \int_0^{2\pi} \int_0^1 \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix} R^2 \mathrm{d}(\cos\theta)\mathrm{d}\phi \\
&= \alpha \int_0^1 2\pi R^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cos\theta \end{pmatrix} \mathrm{d}(\cos\theta) = 2\pi\alpha R^2 \frac{1}{2}\boldsymbol{e_z} = \pi\alpha R_2 \boldsymbol{e_z} \\
&= \frac{Q^2}{32\pi\epsilon_0 R^2}\boldsymbol{e_z}
\end{aligned} \tag{19}$$

Setzt man noch den Ausdruck für die Ladung der Kugel ein, erhält man

$$\boldsymbol{F_\sigma} = \frac{(\sigma 4\pi R^2)^2}{32\pi\epsilon_0 R^2}\boldsymbol{e_z} \tag{20}$$

Das Ergebnis kann analog zum Fall des Plattenkondensators interpretiert werden als das Feld der unteren Hälfte multipliziert mit der Ladungsdichte auf der oberen Hälfte des Plattenkondensators mal deren Fläche. Im allgemeinen Fall, wo die untere Kugelhälfte die Ladungsdichte $\sigma_2 \neq \sigma$ trägt, erhält man mit dieser Überlegung die Kraft auf die obere Hälfte:

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F_\sigma} \frac{\sigma_2}{\sigma} \tag{21}$$

Aufgabe 12: Wellen in leitenden und disipativen Medien

Eine im Vakuum propagierende elektromagnetische Welle ($\vec{k} = |\vec{k}|\hat{\epsilon}_x$) trifft senkrecht auf ein Medium mit komplexen Brechungsindex $n = Re(n) + i\,Im(n) = n_1 + i\,n_2$.

(**a**) Berechnen Sie die Amplituden der reflektierten und der transmitierten Welle im Falle $\mu = 1$.

(**b**) Finden Sie nach der Mittelung über einen Zeitraum $T \gg 1/\omega$ die Energiestromdichte der transmittierten Welle.

Hinweis: Wählen Sie die Polarisationen der $\vec{E}$-Felder entlang der y-Achse.

(**c**) Berechnen Sie den Brechungsindex $n = Re(n) + i\,Im(n)$ im Falle eines Leiters mit einer konstanten Leitfähigkeit σ und diskutieren Sie die Ergebnisse (a) und (b) im Limes $\sigma/(\varepsilon_0\omega) \gg 1$.

Lösung

(**a**) Wähle eine linear polarisierte einfallende Welle mit $\vec{E}_0 = E_{0y}\hat{\epsilon}_y$, die sich in x-Richtung ausbreitet. Die E- und B-Felder in verschiedenen Medien werden angesetzt als:
$x < 0$:

$$\vec{E} = \vec{E}_0\, e^{ik_1x - i\omega t} + \vec{E}_1\, e^{-ik_1x - i\omega t}\,,$$
$$c\vec{B} = \left(\hat{\epsilon}_x \times \vec{E}_0\right)\, e^{ik_1x - i\omega t} - \left(\hat{\epsilon}_x \times \vec{E}_1\right)\, e^{-ik_1x - i\omega t}\,.$$

$0 < x$:

$$\vec{E} = \vec{E}_2\, e^{ik_2x - i\omega t}, \quad c\vec{B} = n\left(\hat{\epsilon}_x \times \vec{E}_2\right)\, e^{ik_2x - i\omega t}\,.$$

Dabei sind $k_1 = \omega/c_0$, $k_2 = n\omega/c_0$
Die tangentiellen Komponenten der E- und H-Felder sind an der Grenzen zwischen den Medien stetig. Im Fall nichtmagnetischer Medien ($\mu_i = 1$) gilt dies auch für B-Felder.
Aus der Stetigkeit der y-Komponenten der elektrischen Felder an den Grenze $x = 0$ folgt:

$$E_{0y} + E_{1y} = E_{2y} \tag{22}$$

Aus der Stetigkeit der z-Komponenten der B-Felder an der Grenze $x = 0$ folgt:

$$(E_{0y} - E_{1y}) = n\, E_{2y} \tag{23}$$

$$\Rightarrow\; E_{2y} = \frac{2}{1+n} E_{0y}\,,$$
$$E_{1y} = \frac{1-n}{1+n} E_{0y}$$

(**b**) $n = n_1 + i\, n_2, E_{0y} = |E_{0y}|e^{i\alpha}$:

$$E_{2y} = \frac{2}{|1+n|}|E_{0y}|e^{-n_2\omega x/c_0}\cos(n_1\omega x/c_0 - \omega t + \alpha - \varphi)\,, \quad \tan\varphi = \frac{n_2}{1+n_1}$$

$$c_0 B_{2z} = \frac{2|n|}{|1+n|}|E_{0y}|e^{-n_2\omega x/c_0}\cos(n_1\omega x/c_0 - \omega t + \alpha - \varphi + \varphi_1)\,, \quad \cos\varphi_1 = \frac{n_1}{\sqrt{n_1^2+n_2^2}}$$

Die zeitlich gemittelte Energiestromdichte der transmittierten Welle ist:

$$\overline{\vec{S}} = \overline{Re(\vec{E}) \times Re(\vec{H})} = \frac{4|n|}{|1+n|^2}\frac{|E_{0y}|^2}{c_0\mu_0}e^{-2n_2\omega x/c_0}[\cos\varphi_1\overline{\cos^2(n_1\omega x/c_0 - \omega t + \alpha)}$$

$$-\sin\varphi_1\overline{\cos(n_1\omega x/c_0 - \omega t + \alpha - \varphi)\sin(n_1\omega x/c_0 - \omega t + \alpha - \varphi)}]\hat{\epsilon}_x$$

$$= \frac{2|n|}{|1+n|^2}\frac{|E_{0y}|^2}{c_0\mu_0}e^{-2n_2\omega x/c_0}\cos\varphi_1\hat{\epsilon}_x = \frac{2n_1}{|1+n|^2}\frac{|E_{0y}|^2}{c_0\mu_0}e^{-2n_2\omega x/c_0}\hat{\epsilon}_x$$

Alternative:

$$\overline{\vec{S}} = \frac{1}{2}Re(\vec{E}\times\vec{H}^*) \overset{\mu=1}{=} \frac{1}{2\mu_0}Re(\vec{E}\times\vec{B}^*) = \frac{1}{2\mu_0\omega}Re(\vec{E}\times(\vec{k}^*\times\vec{E}^*)) =$$

$$= \frac{1}{2\mu_0\omega}Re(\vec{k}^*)(\vec{E}\cdot\vec{E}^*) = \frac{2n_1}{|1+n|^2}\frac{|E_{0y}|^2}{c_0\mu_0}e^{-2n_2\omega x/c_0}\hat{\epsilon}_x$$

(**c**) Oszillierende Felder in einem Leiter ($\vec{j}_f = \sigma\vec{E}$):

$$E, D, H, B \sim e^{-i\omega t} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \to -i\omega$$

$$\vec{\nabla}\vec{H} = \vec{j}_f + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \to \vec{\nabla}\vec{H} = \sigma\vec{E} - i\omega\varepsilon_0\varepsilon_b(\omega)\vec{E} = -i\omega\varepsilon_0\varepsilon_L(\omega)\vec{E},$$

$$\varepsilon_L(\omega) = i\frac{\sigma}{\varepsilon_0\omega} + \varepsilon_b(\omega), \quad n = \sqrt{\varepsilon_L\mu}$$

ε_b entspricht einem Beitrag von gebundenen Ladungen des Leiters.