

Zentralübung zur Vorlesung

Theoretische Physik II: Elektrodynamik

Blatt 4 (Lösungen) Dr. A.Zharikov, Prof. R.Netz, TU München, WS 2009/2010

Aufgabe 8: Maxwell-Gleichungen. Lorentz-Eichung.

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{D} &= \rho_{\text{frei}}, & \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 & \vec{\nabla} \times \vec{H} &= \vec{j}_{\text{frei}} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \vec{D} &= \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E} & \vec{H} &= \frac{1}{\mu \mu_0} \vec{B}\end{aligned}$$

(a) Kontinuitätsgleichung

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{H}) \equiv 0 = \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_f + \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_f + \frac{\partial \rho_f}{\partial t}$$

(b) Analog zur Diskussion der Coulomb-Eichung, zeigen Sie, dass es immer möglich ist,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0$$

zu wählen.

Lösung

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}, \quad \vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} \Phi$$

\vec{E} -, \vec{B} -Felder ändern sich nicht bei der Transformation:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) \rightarrow \vec{A}'(\vec{r}, t) = \vec{A}(\vec{r}, t) + \nabla \Lambda(\vec{r}, t) \quad ; \quad \Phi(\vec{r}, t) \rightarrow \Phi'(\vec{r}, t) = \Phi(\vec{r}, t) - \frac{\partial}{\partial t} \Lambda(\vec{r}, t)$$

$\Lambda(\vec{r}, t)$ eine beliebige skalare Funktion. Nehmen Sie an

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t} = f(\vec{r}, t) \neq 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}' + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \Phi'}{\partial t} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \nabla^2 \Lambda(\vec{r}, t) - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \Lambda(\vec{r}, t)}{\partial t^2} =$$

$$= f(\vec{r}, t) + [\nabla^2 - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2}] \Lambda(\vec{r}, t)$$

$$[\nabla^2 - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2}] \Lambda(\vec{r}, t) = -f(\vec{r}, t) \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{A}' + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \Phi'}{\partial t} = 0 \quad (\mu_0 \varepsilon_0 = \frac{1}{c_0^2})$$

$\Lambda(\vec{r}, t)$ ist eine Lösung einer nicht homogenen Wellengleichung. Lösungsmethoden werden in der nächsten Vorlesungen und Übungen betrachtet.

Aufgabe 9: Zylinderförmiger Leiter

Energiesatz in integraler Form:

$$\int_V d^3r \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{S} + \frac{\partial w_j}{\partial t} + \frac{\partial w_{em}}{\partial t} \right) = \oint_{F(V)} \vec{S} \cdot d\vec{\sigma} + \frac{\partial W_j}{\partial t} + \frac{\partial W_{em}}{\partial t} = 0$$

Das Oberflächenintegral gibt die Energiemenge, die pro Zeiteinheit durch die Oberfläche des Volumens fließt. Der zweite Term bezeichnet Produktion der Joule'schen Wärme pro Zeit im Volumen. Der dritte Term gibt die Änderung der Energie der elektromagnetische Felder im Volumen pro Zeit an.

- (a) Wähle Zylinderkoordinaten und Strom in z -Richtung. R ist Radius des Zylinderleiters. Elektrisches Feld im Leiter ist $\vec{E} = E\hat{e}_z$.
 $r \geq R$:

$$\vec{E} = E\hat{e}_z \text{ (Stetigkeit der Tangentialkomponente)}, \quad \vec{B} = (\mu_0 I / 2\pi r)\hat{e}_\varphi$$

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} = -\frac{IE}{\pi r} \hat{e}_r$$

Wähle ein Zylindervolumen mit Länge l und Radius R . Spannung U ist gleich El :

$$\frac{1}{l} \frac{\partial W_j}{\partial t} = \frac{1}{l} IU = IE$$

$$\frac{1}{l} \oint_{F(V)} \vec{S} \cdot d\vec{\sigma} = -IE$$

Negatives Vorzeichen des Oberflächenintegrals bedeutet die Energiezufuhr von außen in den Zylinder.

Bemerkung: Die beiden Grundflächen des Zylinders tragen nicht bei.

$$\frac{1}{l} \oint_{F(V)} \vec{S} \cdot d\vec{\sigma} + \frac{1}{l} \frac{\partial W_j}{\partial t} = 0$$

- (b) $r \leq R$: Satz von Stokes ($d\vec{l} = r d\varphi \vec{e}_\varphi$) + Maxwellgleichung ($\text{rot } \vec{H} = \vec{j} = (I/\pi R^2) \hat{e}_z$)

$$H_\varphi 2\pi r = \frac{I}{\pi R^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^r r' dr' = I \frac{r^2}{R^2} \Rightarrow \vec{H}(r) = \frac{I}{2\pi R^2} r \hat{e}_\varphi,$$

$$W_m = \frac{1}{2} \int_V \vec{H} \cdot \vec{B} d^3r = \frac{\mu\mu_0 I^2}{16\pi}$$

Aufgabe 10: Plattenkondensator

Ein Plattenkondensator aus zwei parallelen kreisförmigen Platten mit Radius R , deren Mittelpunkte auf der z -Achse liegen, werde langsam aufgeladen, so dass sich die zeitabhängige elektrische Verschiebung zwischen den Platten als $\vec{D}(t) = D(t) \vec{e}_z$ ($\dot{D} = \text{const.}$) beschreiben lässt.

- (a) Berechnen Sie das durch den Verschiebungsstrom induzierte Magnetfeld \vec{H} zwischen den Platten als Funktion des Abstandes r von der Symmetrieachse des Kondensators.

Hinweis: Nehmen Sie an, dass der Abstand d der Platten klein gegen ihren Radius R ist und vernachlässigen Sie Randeffekte. Gehen Sie davon aus, dass das Magnetfeld keine radiale und keine z -Komponente hat.

- (b) Berechnen Sie den Poynting-Vektor.
 (c) Berechnen Sie den Poyntingschen Energiefluß in den Kondensator hinein sowie die zeitliche Änderung der im Kondensator gespeicherten elektrischen Feldenergie und zeigen Sie, dass diese übereinstimmen.

Lösung

- (a)

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \dot{D} \hat{e}_z \Rightarrow (\vec{\nabla} \times \vec{H})_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r H_\varphi) = \dot{D} \Rightarrow H_\varphi = \dot{D} r / 2 + \text{const}/r.$$

H divergiert nicht $\Rightarrow \text{const} = 0$, $\vec{H} = (\dot{D} r / 2) \hat{e}_\varphi$.

Alternative: Wähle die Kreisfläche mit Radius r ($r \leq R$). Satz von Stokes + Maxwell-Gleichung:

$$\int_{\partial F} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_F (\vec{\nabla} \times \vec{H}) \cdot d\vec{\sigma} = \int_F \dot{D} \epsilon_z \cdot d\vec{\sigma}.$$

Mit $d\vec{\sigma} = r' dr' d\varphi \hat{e}_z$ und $d\vec{l} = r d\varphi \hat{e}_\varphi$ folgt:

$$H_\varphi 2\pi r = \dot{D} \pi r^2 \Rightarrow \vec{H} = (\dot{D} r / 2) \hat{e}_\varphi.$$

(b)

$$\vec{S}(r) = \vec{E} \times \vec{H} = \frac{1}{2\epsilon\epsilon_0} D(t) \dot{D}(t) r (\hat{e}_z \times \hat{e}_\varphi) = -\frac{1}{2\epsilon\epsilon_0} D(t) \dot{D}(t) r \hat{e}_r.$$

(c) Energiezufluss in den Kondensator hinein ($d\vec{\sigma} = Rdz d\varphi \hat{e}_r$):

$$-\int_F \vec{S} \cdot d\vec{\sigma} = 2\pi R d (-\hat{e}_r) \cdot \vec{S}(R) = \pi d R^2 D(t) \dot{D}(t) / \epsilon\epsilon_0,$$

$$\frac{\partial W_e}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2} \int_V \vec{E} \cdot \vec{D} d^3r = \pi d R^2 D(t) \dot{D}(t) / \epsilon\epsilon_0.$$