

Zentralübung zur Vorlesung

Theoretische Physik II: Elektrodynamik

Blatt 3 (Lösungen) Dr. A.Zharikov, Prof. R.Netz, TU München, WS 2009/2010

Aufgabe 6: Feld einer magnetisierten Kugel. Oberflächenstromdichte. Lösung (von Tobias Ried)

Betrachtet wird eine homogen magnetisierte Kugel mit Magnetisierung $\mathbf{M} = M\mathbf{e}_z$ und Radius R im Vakuum.

Da die Magnetisierung innerhalb \mathbf{M} und außerhalb $\mathbf{0}$ beträgt, lässt sich diese schreiben als

$$\mathfrak{M} = M\Theta(R - r) \quad (1)$$

Die Magnetisierungsstromdichte ergibt sich aus

$$\text{rot}\mathfrak{M} = \mathbf{j}_m \quad (2)$$

Mit der Produktregel erhält man dann

$$\begin{aligned} \text{rot}\mathfrak{M} &= \text{rot}(M\Theta(R - r)) = (\text{rot}\mathbf{M})\Theta(R - r) - \mathbf{M} \times \nabla\Theta(R - r) \\ &= -\mathbf{M} \times \left(\frac{\partial}{\partial r}\Theta(R - r)\right)\frac{\mathbf{r}}{r} = \mathbf{M} \times \frac{\mathbf{r}}{r}\delta(r - R) \end{aligned} \quad (3)$$

Dabei wurde $\text{rot}\mathbf{M} = 0$ und $\partial_r\Theta(R - r) = -\delta(R - r) = -\delta(r - R)$ verwendet. Die Stromdichte ist also

$$\mathbf{j}_m = \left(\mathbf{M} \times \frac{\mathbf{r}}{r}\right)\delta(r - R) = \mathbf{K}_m\delta(r - R) \quad (4)$$

mit der *Oberflächenstromdichte* \mathbf{K}_m der Magnetisierung.

Die Magnetisierung erzeugt damit ein Vektorpotential Randbedingungen für das B-Feld an der Grenze zwischen zwei Medien:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_m &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \frac{\mathbf{j}_m(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \frac{M\mathbf{e}_z \times \frac{\mathbf{r}'}{r'}\delta(r' - R)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} M\mathbf{e}_z \times \int d^3r' \frac{\mathbf{r}'\delta(r' - R)}{r'|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \end{aligned} \quad (5)$$

Zum Ausführen des Integrals wird ein Koordinatensystem $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ gewählt, dessen \tilde{z} -Achse in \mathbf{r} -Richtung zeigt, also $\mathbf{e}_{\tilde{z}} = \mathbf{e}_r$.

Da bei einer Drehung des Koordinatensystems Längen unverändert bleiben, lässt sich \mathbf{r}' schreiben als

$$\mathbf{r}' = r' \begin{pmatrix} \sin \tilde{\theta}' \cos \tilde{\phi}' \\ \sin \tilde{\theta}' \sin \tilde{\phi}' \\ \cos \tilde{\theta}' \end{pmatrix} \quad (6)$$

und

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{(r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \tilde{\theta}')^{1/2}} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} P_l(\cos \tilde{\theta}') \quad (7)$$

also in Kugelkoordinaten bezüglich des Koordinatensystems $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$.

$$\begin{aligned} \mathbf{I} &= \int d^3r' \frac{\mathbf{r}' \delta(r' - R)}{r' |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \\ &= \int_0^{\infty} dr' \int_{-1}^1 d(\cos \tilde{\theta}') \int_0^{2\pi} d\tilde{\phi}' \begin{pmatrix} \sin \tilde{\theta}' \cos \tilde{\phi}' \\ \sin \tilde{\theta}' \sin \tilde{\phi}' \\ \cos \tilde{\theta}' \end{pmatrix} \frac{r'^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \delta(r' - R) = \\ &= \int_0^{\infty} dr' \int_{-1}^1 d(\cos \tilde{\theta}') 2\pi \mathbf{e}_{\tilde{z}} \cos \tilde{\theta}' \frac{r'^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \delta(r' - R) = \\ &= 2\pi \mathbf{e}_{\tilde{z}} \int_0^{\infty} dr' r'^2 \delta(r' - R) \int_{-1}^1 d(\cos \tilde{\theta}') P_1(\cos \tilde{\theta}') \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} P_l(\cos \tilde{\theta}') = \\ &= 2\pi \mathbf{e}_{\tilde{z}} \int_0^{\infty} dr' r'^2 \delta(r' - R) \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} \frac{2}{2l+1} \delta_{l1} = \\ &= \frac{4\pi}{3} \mathbf{e}_{\tilde{z}} \int_0^{\infty} dr' r'^2 \delta(r' - R) \frac{r_{<}}{r_{>}^2} \end{aligned}$$

Mit den Abkürzungen

$$r_{<} := \min(r, R) \quad r_{>} := \max(r, R) \quad (8)$$

kann man dies schreiben als

$$\frac{4\pi}{3} \mathbf{e}_{\tilde{z}} R^2 \frac{r_{<}}{r_{>}^2} \quad (9)$$

und wegen $\mathbf{e}_{\tilde{z}} = \mathbf{e}_r$

$$\frac{4\pi}{3} R^2 \frac{r_{<}}{r_{>}^2} \mathbf{e}_r \quad (10)$$

Das Vektorpotential der Magnetisierung ist damit

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{3} MR^2 \frac{\bar{r}_{<}}{\bar{r}_{>}^2} \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_r = \begin{cases} \frac{\mu_0}{3} Mr \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_r & , r < R \\ \frac{\mu_0}{3} MR^3 \frac{\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_r}{r^2} & , r > R \end{cases} \quad (11)$$

bzw.

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{\mu_0}{3} \mathbf{M} \times \mathbf{r} & , r < R \\ \frac{\mu_0}{3} R^3 \frac{\mathbf{M} \times \mathbf{r}}{r^3} & , r > R \end{cases} \quad (12)$$

Das Feld innerhalb der Kugel ist dann

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^{in}(\mathbf{r}) &= \text{rot} \mathbf{A}^{in}(\mathbf{r}) = \nabla \times \left(\frac{\mu_0}{3} \mathbf{M} \times \mathbf{r} \right) \\ &= \frac{\mu_0}{3} \left((\mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{M} - (\mathbf{M} \cdot \nabla) \mathbf{r} + \mathbf{M} \text{div} \mathbf{r} - \mathbf{r} \text{div} \mathbf{M} \right) \\ &= \frac{\mu_0}{3} (0 - \mathbf{M} + 3\mathbf{M} - 0) = \frac{2\mu_0}{3} \mathbf{M} \end{aligned} \quad (13)$$

Das Feld außerhalb ist ein reines Dipolfeld

$$\mathbf{B}^a(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{3(\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\boldsymbol{\mu}}{r^3} \right) \quad (14)$$

mit

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{4\pi}{3} R^3 \mathbf{M} \quad (15)$$

Vergleicht man das eben gelöste Problem einer homogen magnetisierten Kugel mit dem einer homogen geladenen rotierenden Hohlkugel (Radius R , Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{e}_z$, Ladung Q auf der Oberfläche), so sieht man, dass beide völlig quivalent sind. Es gilt nämlich bei der rotierenden Hohlkugel:

$$\rho(\mathbf{r}) = \sigma \delta(R - r) \quad \text{mit} \quad \sigma = \frac{Q}{4\pi R^2} \quad (16)$$

und daher

$$\begin{aligned} \mathbf{j}(\mathbf{r}) &= \rho(\mathbf{r}) \mathbf{v}(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r}) (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = \\ &= \sigma \delta(R - r) (\boldsymbol{\omega} \times r \mathbf{e}_r) = \sigma R \left(\boldsymbol{\omega} \times \frac{\mathbf{r}}{r} \right) \delta(r - R) \end{aligned} \quad (17)$$

Aus dem Vergleich (17) und (3) verwendet man folgende Ersetzung:

$$\sigma\omega R\boldsymbol{\omega} = \frac{Q}{4\pi R}\boldsymbol{\omega} \rightarrow \mathbf{M} \quad (18)$$

Das magnetische Moment der Hohlkugel ist also

$$\tilde{\boldsymbol{\mu}} = \frac{QR^2}{3}\boldsymbol{\omega} \quad (19)$$

Die Felder ergeben sich analog zum oben gerechneten Fall.

Aufgabe 7: Schwebender Magnet über einem Supraleiter

Ein Magnet der Masse M und dem magnetischen Moment $\vec{m} = m\hat{e}_z$ befinde sich im Gravitationsfeld ($\vec{g} = -g\hat{e}_z$) über einem Supraleiter magnetischer Suszeptibilität $\chi_m = -1$, der sich im unterem Halbraum ($z \leq 0$) befinde.

- (a) Berechnen Sie das Magnetfeld im oberen Halbraum mittels Spiegeldipols.
- (b) Bestimmen Sie die Flächenstromdichte \vec{K} auf der Oberfläche des Supraleiters.
- (c) Bestimmen Sie die stabile Gleichgewichtshöhe h des Magnetes über Supraleiter durch Minimierung der potentiellen Energie des Dipols $U(h)$

Hinweis: Verwenden Sie folgende Definition für potentielle Energie

$$U = -\frac{1}{2}\vec{B}^S \cdot \vec{m} + Mgh,$$

wobei \vec{B}^S das Feld des Spiegeldipols am Ort des Dipols ist.

Lösung

Randbedingungen für das B-Feld an der Grenze zwischen zwei Medien:

$$\vec{n} \cdot (\vec{B}^1 - \vec{B}^2) = 0, \quad \vec{B}_t^1 - \vec{B}_t^2 = \mu_0 \vec{K} \times \vec{n}$$

- (a) Man berechne das B-Feld im oberen Halbraum als die Summe der Felder des Dipols \vec{m} am Ort $\vec{r}_m = h\hat{e}_z$ und des Spiegeldipols \vec{m}_s am Ort $\vec{r}_s = -h\hat{e}_z$

$$\vec{B}^1(\vec{r}) = \vec{B}^m(\vec{r}; \vec{m}, \vec{r}_m) + \vec{B}^S(\vec{r}; \vec{m}_s, \vec{r}_s) \quad (z > 0).$$

Innerhalb des Supraleiters gilt:

$$\vec{B}^2(\vec{r}) = \vec{0} \quad (z < 0).$$

Aus der Stetigkeit der Normalkomponente des B-Feldes an der Grenze ($z = 0$) folgt:

$$\vec{B}_z^1(x, y, z = 0) = 0 \Rightarrow \vec{m}_s = \vec{m} - 2m_z \hat{e}_z = (m_x, m_y, -m_z)^T$$

Hinweis: Zeichne die Feldlinien der Dipole in Dipolnäherung und zeige, dass die Normalkomponente für $z = 0$ verschwindet. Alternativ: Verwende die Ergebnisse B8A1 (Übungen).

- (b) Aus der Randbedingungen für die Tangentialkomponenten des B-Feldes an der Grenze zwischen zwei Medien folgt:

$$\mu_0(\vec{n} \times (\vec{K} \times \vec{n})) = \mu_0 \vec{K} - \mu_0 \vec{n}(\vec{K} \cdot \vec{n}) = \mu_0 \vec{K} = \vec{n} \times (\vec{B}^1 - \vec{B}^2)$$

Weiter wie bei der Angabe: $\vec{m} = m \hat{e}_z, \vec{n} = \hat{e}_z, \vec{B}^2 = 0, \vec{m}_s = -m \hat{e}_z$

In Zylinderkoordinaten ($\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \varphi, z$):

$$(z = 0) \mu_0 \vec{K} = \hat{e}_z \times (\vec{B}^1 - \vec{B}^2) = \hat{e}_z \times \vec{B}^1 = 2\hat{e}_z \times \vec{B}^m = -\frac{3\mu_0}{2\pi} \frac{mh\rho}{(\rho^2 + h^2)^{5/2}} \hat{e}_\varphi$$

- (c) Das Magnetfeld des Spiegeldipols am Ort des Dipols $\vec{r} = \vec{r}_m$ lautet:

$$\vec{B}^S(\vec{r}_m; \vec{m}_s, \vec{r}_s) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{3(\vec{m}_s \cdot (\vec{r}_m - \vec{r}_s))(\vec{r}_m - \vec{r}_s)}{|\vec{r}_m - \vec{r}_s|^5} - \frac{\vec{m}_s}{|\vec{r}_m - \vec{r}_s|^3} \right) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m}{4h^3} \hat{e}_z$$

Die potentielle Energie

$$U(h) = -\frac{1}{2} \vec{B}^S \cdot \vec{m} + Mgh = \frac{\mu_0 m^2}{32\pi h^3} + Mgh$$

ist minimal ($dU/dh = 0$) für

$$h = \left(\frac{3\mu_0 m^2}{32\pi Mg} \right)^{1/4}.$$