

Zentralübung zur Vorlesung

Theoretische Physik II: Elektrodynamik

Blatt 2 (Lösungen) Dr. A.Zharikov, Prof. R.Netz, TU München, WS 2009/2010

Aufgabe 4: Laplace-Gleichung in Kugelkoordinaten. Separationsansatz.

(zusammengefasst von Tobias Ried)

$$\Delta\Phi = \frac{1}{r^2}\partial_r r^2 \partial_r \Phi + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \partial_\theta \sin\theta \partial_\theta \Phi + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \partial_\phi^2 \Phi \quad (1)$$

Ansatz für partikuläre Lösung:

$$\Phi = R(r)P(\theta)Q(\phi) \quad (2)$$

mit $x = \cos\theta$ ($dx = -\sin\theta d\theta$)

$$\Delta\Phi = PQ \frac{1}{r^2} \partial_r r^2 \partial_r R + \frac{RQ}{r^2} (\partial_x(1-x^2) \partial_x P) + \frac{RP}{(1-x^2)r^2} \partial_\phi^2 Q = 0 \quad (3)$$

bzw.

$$\frac{PQR}{r^2} \left(\frac{\partial_r r^2 \partial_r R}{R} + \frac{\partial_x(1-x^2) \partial_x P}{P} + \frac{1}{1-x^2} \frac{\partial_\phi^2 Q}{Q} \right) = 0 \quad (4)$$

Sammeln der Terme:

$$\frac{\partial_r r^2 \partial_r R}{R} = -\frac{\partial_x(1-x^2) \partial_x P}{P} - \frac{1}{1-x^2} \frac{\partial_\phi^2 Q}{Q} \quad (5)$$

da die linke Seite nur von r abhängt, die rechte nur von θ und ϕ müssen beide gleich einer Konstanten λ sein.

$$\frac{\partial_r r^2 \partial_r R}{R} = \lambda \quad (6)$$

$$-\frac{\partial_x(1-x^2) \partial_x P}{P} - \frac{1}{1-x^2} \frac{\partial_\phi^2 Q}{Q} = \lambda \quad (7)$$

Multiplikation von (7) mit $(1-x^2)$ und Umstellen liefert

$$-\frac{\partial_x(1-x^2) \partial_x P}{P} (1-x^2) - \lambda(1-x^2) = \frac{\partial_\phi^2 Q}{Q} = \text{const.} = \mu \quad (8)$$

Man erhält also folgende Eigenwertprobleme

$$\partial_\phi^2 Q = \mu Q \quad (9)$$

$$\partial_x(1-x^2)\partial_x P + \frac{\mu}{1-x^2}P = -\lambda P \quad (10)$$

$$\partial_r r^2 \partial_r R = \lambda R \quad (11)$$

Lösung der Eigenwertgleichungen:

1.

$$\partial_\phi^2 Q = \mu Q \quad \Rightarrow \quad Q \propto e^{\pm\sqrt{\mu}\phi} \quad (12)$$

wegen

$$Q(\phi + 2\pi) = Q(\phi) \quad \Rightarrow \quad \mu = -m^2 \quad (13)$$

und damit

$$Q = e^{im\phi} \quad \text{für } m \in \mathbb{Z} \quad (14)$$

2.

$$\partial_x(1-x^2)\partial_x P - \frac{m^2}{1-x^2}P = -\lambda P \quad (15)$$

m=0:

$$\partial_x(1-x^2)\partial_x P = -\lambda P \quad (16)$$

Mit dem Ansatz

$$P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \quad (17)$$

erhält man durch einsetzen in die DGL (16) die Rekursionsformel

$$a_{k+2} = \frac{k(k+1) - \lambda}{(k+1)(k+2)} a_k \quad (18)$$

Die Forderung, dass P nicht divergiert bzw. eine endliche Summe ist, muss λ von der Form sein

$$\lambda = l(l+1) \quad l = 0, 1, 2, \dots \quad (19)$$

Damit ist $a_{l+2} = 0$.

Die hiermit gefundenen Polynome $P_l(x)$ heißen LEGENDRE-Polynome.

$l=0$: $P_0 = a_0$, mit $P_l(x=1) = 1$ ist $a_0 = 1$ und $P_0 = 1$.

$l=2$: $a_2 = -3a_0$, mit $a_4, a_6, \dots = 0$ ist $P_2 = a_0 - 3a_0x^2 = a_0(1 - 3x^2)$. Wegen $P(1) = 1$ ist $a_0 = -1/2$ und $P_2 = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$.

$l=3$: $a_3 = -\frac{5}{3}a_1$, mit $a_0, a_2, \dots = 0$ ist $P_3 = a_1x - \frac{5}{3}a_1x^3 = -\frac{3}{2}(x - \frac{5}{3}x^3)$ (da wieder $P(1) = 1$).

Für die geraden LEGENDRE-Polynome setze $a_1 = 0$ (damit verschwinden alle ungeraden Monome), für die ungeraden LEGENDRE-Polynome setze $a_0 = 0$ (damit verschwinden alle geraden Monome).

(Dies ergibt sich aus der Symmetrie des Differentialoperators $\hat{A} = \partial_x(1 - x^2)\partial_x$: Es gilt $\hat{A}(\tau) = \hat{A}(-\tau)$. Damit folgt für das Eigenwertproblem $\hat{A}(\tau)f(\tau) = \lambda(\tau)$ sofort $\hat{A}(-\tau)f(-\tau) = \lambda f(-\tau) = \hat{A}(\tau)f(-\tau)$. Die Eigenfunktion f muss dann symmetrisch oder antisymmetrisch sein.)

Außerdem gilt die RODRIGUEZ-Formel:

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{\partial^l}{\partial x^l} (x^2 - 1)^l \quad (20)$$

Symmetrieeigenschaft der LEGENDRE-Polynome:

$$P_l(x) = (-1)^l P_l(-x) \quad (21)$$

Normierung der LEGENDRE-Polynome:

$$\int_{-1}^1 P_l(x) P_m(x) dx = \delta_{lm} \frac{2}{2l + 1} \quad (22)$$

Nun zum Fall $m \neq 0$: Hier ist folgendes Operator-EWP zu lösen:

$$\partial_x(1 - x^2)\partial_x P(x) - \frac{m^2}{1 - x^2} P(x) = -\lambda P(x) \quad (*) \quad (23)$$

Mit dem Ansatz

$$P(x) = (1 - x^2)^\alpha f(x) \quad \alpha = \frac{|m|}{2} \quad (24)$$

wird (*) zu

$$(1 - x^2)\partial_x^2 f - 2(m + 1)\partial_x f - m(m + 1)f = -\lambda f \quad (25)$$

Dieses neue Eigenwertproblem

$$\tilde{A}(m)f(x) = -\lambda f(x) \quad \text{mit} \quad \tilde{A}(m) = (1 - x^2)\partial_x^2 - 2(m + 1)\partial_x - m(m + 1) \quad (26)$$

hat als Lösung die assoziierten LEGENDRE-Funktionen

$$P_l^m(x) = (-1)^m (1-x^2)^{\frac{|m|}{2}} \frac{\partial^m}{\partial x^m} P_l(x) \quad (27)$$

Dies sieht man so:

Setze $f = \frac{\partial^m}{\partial x^m} P_l(x)$. Dann gilt (für die Operatoridentität siehe Angabenblatt)

$$\tilde{A}(m)f(x) = \tilde{A}(m)\partial_x^m P_l(x) = \partial_x^m [\partial_x(1-x^2)\partial_x] P_l(x) = -\lambda \partial_x^m P_l(x) \quad (28)$$

Symmetrieeigenschaft der assoziierten LEGENDRE-Funktionen

$$P_l^m(x) = (-1)^{l+m} P_l^m(-x) \quad (29)$$

Es bleibt das Eigenwertproblem für $R(r)$ zu lösen:

$$\partial_r r^2 \partial_r R(r) = \lambda R \quad \text{mit} \quad \lambda = l(l+1) \quad (30)$$

Der Ansatz $R(r) = r^\alpha$ liefert durch einsetzen

$$\alpha(\alpha+1)r^\alpha = l(l+1)r^\alpha \quad (31)$$

Diese quadratische Gleichung in α hat die beiden Lösungen $\alpha_1 = l$ und $\alpha_2 = -(l+1)$.

Damit sind die partikulären Lösungen der LAPLACE-Gleichung in Kugelkoordinaten gefunden:

$$r^l P_l^m(x) e^{im\phi} \qquad \frac{1}{r^{l+1}} P_l^m(x) e^{im\phi} \quad (32)$$

Die allgemeine Lösung erhält man durch Summation über l und m :

$$\Phi(r, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left(a_{lm} r^l + \frac{b_{lm}}{r^{l+1}} \right) P_l^m(\cos \theta) e^{im\phi} \quad (33)$$

oder

$$\Phi(r, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left(a_{lm} r^l + \frac{b_{lm}}{r^{l+1}} \right) Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (34)$$

mit den Kugelflächenfunktionen

$$Y_{lm}(\theta, \phi) = N_{lm} P_l^m(\cos \theta) e^{im\phi} \quad \text{mit} \quad N_{lm} = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} \quad (35)$$

Bei azimuthaler Symmetrie vereinfacht sich dies zu

$$\Phi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(a_l r^l + \frac{b_l}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos \theta) \quad (36)$$

Aufgabe 5: Dielektrische Kugel

Betrachten Sie eine dielektrische Kugel (Radius R , Dielektrizitätskonstante ε) im Vakuum. Eine Ladung Q wurde in die Position $\vec{r}_0 = r_0 \hat{e}_z$ bezüglich des Kugelzentrums eingebracht ($r_0 > R$).

- (a) Unter der Darstellung für das gesamte Potential

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r} - \vec{r}_0|} + \Phi_K(\vec{r})$$

finden Sie das Potential $\Phi_K(r)$ innerhalb und ausserhalb der Kugel.

- (b) Diskutieren Sie die folgende Grenzfälle
 - (1) einer nicht-geerdeten Metallkugel ($\varepsilon \rightarrow \infty$)
 - (2) einer Punktladung im Abstand h von einer dielektrischen Ebene ($R, r_0 \rightarrow \infty, h = r_0 - R = \text{const}$)
 - (3) einer dielektrischen Kugel im homogenen Feld ($r_0 \rightarrow \infty, Q \rightarrow \infty, -Q/4\pi\varepsilon_0 r_0^2 = E_0 = \text{const}$)

Lösung (zusammengefasst von Tobias Ried)

Es gilt:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D}(\vec{r}) = \rho_{\text{frei}}(\vec{r}) \quad (37)$$

Für nicht zu große äußere Feldstärken E hängen die elektrische Feldstärke E und die elektrische Verschiebung D linear zusammen:

$$\vec{D}(\vec{r}) = \varepsilon(\vec{r})\varepsilon_0\vec{E}(\vec{r}) \quad (38)$$

Da immer noch

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \quad (39)$$

lässt sich \vec{E} als Gradient eines skalaren Potentials Φ darstellen

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi \quad (40)$$

Damit gilt für die elektrische Verschiebung

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot (\epsilon(\vec{r})\epsilon_0\vec{E}(\vec{r})) &= \epsilon(\vec{r})\epsilon_0\vec{\nabla} \cdot \vec{E} + \epsilon_0\vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{\nabla}\epsilon(\vec{r}) = \\ &= -\epsilon(\vec{r})\epsilon_0\Delta\Phi(\vec{r}) - \epsilon_0\vec{\nabla}\Phi(\vec{r}) \cdot \vec{\nabla}\epsilon(\vec{r}) = \\ &= \rho_{frei}(\vec{r})\end{aligned}\quad (41)$$

Auflösen nach $\Delta\Phi$ liefert die Potentialgleichung

$$\Delta\Phi = -\frac{1}{\epsilon_0}\left(\frac{\rho_{frei}}{\epsilon(\vec{r})} + \frac{\epsilon_0\vec{\nabla}\epsilon(\vec{r}) \cdot \vec{\nabla}\Phi}{\epsilon(\vec{r})}\right)\quad (42)$$

Da es sich hier bei $\epsilon(\vec{r})$ um eine Stufenfunktion handelt

$$\epsilon(\vec{r}) = \begin{cases} \epsilon & \text{falls } r \leq R \\ 1 & \text{falls } r > R \end{cases}\quad (43)$$

ist der zweite Teil von Gleichung (42) proportional zu einem Ausdruck, der eine Delta-Funktion beinhaltet, also

$$\frac{\epsilon_0\vec{\nabla}\epsilon(\vec{r}) \cdot \vec{\nabla}\Phi}{\epsilon(\vec{r})} \propto \delta(r - R)\quad (44)$$

und entspricht der im Dielektrikum induzierten Oberflächenladungsdichte

$$\rho_{ind}(\vec{r}) = \sigma\delta(r - R)\quad (45)$$

Bemerkung: Falls sich die freien Ladungen im Medium befinden, wird auch die Polarisationsladungsdichte ρ_P induziert:

$$\frac{\rho_{frei}(\vec{r})}{\epsilon(\vec{r})} = \rho_{frei}(\vec{r}) + \rho_P(\vec{r}), \quad \rho_P(\vec{r}) = -\left(1 - \frac{1}{\epsilon(\vec{r})}\right)\rho_{frei}(\vec{r})$$

Allgemein zur Stufenfunktion

Sei $\Theta(x)$ eine Stufenfunktion

$$\Theta(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ 1/2 & , x = 0 \\ 1 & , x > 0 \end{cases}$$

dann gilt

$$\Theta'(x) = \delta(x)$$

Bei einer vorgegebenen freien Ladungsdichte ist es leicht, den Beitrag Φ_{inh} vom ersten Term in (42) zu finden:

$$\Phi = \Phi_{inh} + \Phi_K$$

$$\Delta\Phi_{inh} = -\frac{1}{\epsilon_0} \frac{\rho_{frei}}{\epsilon(\vec{r})}, \quad \Delta\Phi_{inh} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \frac{\rho_{frei}(\vec{r}')}{\epsilon(\vec{r}')} d^3r'$$

Den Betrag Φ_K von der induzierten Oberflächenladungsdichte findet man durch die Lösung der Laplace-Gleichung im Innen- und Außenraum der Kugel mit den Rand(Anschluss)bedingungen.

Im Falle einer Punktladung außerhalb der Kugel im Abstand r_0 vom Kugelmittelpunkt gilt:

$$\Phi_{inh} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0|\vec{r} - \vec{r}_0|} \quad (46)$$

Würde sich die Punktladung innerhalb der dielektrischen Kugel befinden, ergäbe sich

$$\Phi_{inh} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon|\vec{r} - \vec{r}_0|}$$

Bemerkung: In diesem Fall tragen auch die Polarisationsladungen in Φ_{inh} bei.

Für das Potential macht man nun folgenden Ansatz:

$$r < R : \quad \Delta\Phi = \Delta\Phi_{inh} + \Delta\Phi_K = 0 \quad (47)$$

$$r > R : \quad \Delta\Phi = \Delta\Phi_{inh} + \Delta\Phi_K = -\frac{1}{\epsilon_0} Q\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \quad (48)$$

wobei $\Delta\Phi_{inh} = -\frac{1}{\epsilon_0} Q\delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$.

Damit lassen sich die Potentialgleichungen auch schreiben als

$$r < R : \quad \Delta\Phi_K = 0 \quad (49)$$

$$r > R : \quad \Delta\Phi_K = 0 \quad (50)$$

Die Lösung dieser LAPLACE-Gleichung für Φ_K lässt sich aufgrund der azimuthalen Symmetrie $\Phi(r, \theta, \phi) = \Phi(r, \theta)$ schreiben als

$$r < R : \quad \Phi_K^{in}(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(a_l r^l + \frac{b_l}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos \theta) \quad (51)$$

$$r > R : \quad \Phi_K^a(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(\tilde{a}_l r^l + \frac{\tilde{b}_l}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos \theta) \quad (52)$$

Die Koeffizienten $a, b, \tilde{a}, \tilde{b}$ ergeben sich aus den folgenden Randbedingungen/Anschlussbedingungen, die an das Potential gestellt werden:

1. $\Phi_K^{in} < \infty$ (divergiert nicht)
2. $\Phi_K^a \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0$
3. $E_t^{in}(r = R) = E_t^a(r = R)$ bzw. $\Phi^a(R) = \Phi^{in}(R)$
4. $D_n^a(r = R) - D_n^{in}(r = R) = \sigma_{frei}$ ($\sigma_{frei} \neq 0$ beim Kondensator, sonst $\sigma_{frei} = 0$)

Aus Bedingung 1 folgt sofort

$$b_l = 0 \quad \forall l \quad (53)$$

und aus Bedingung 2

$$\tilde{a}_l = 0 \quad \forall l \quad (54)$$

Die dritte Bedingung liefert

$$\Phi_{inh}^a(R) + \Phi_K^a(R) = \Phi_{inh}^{in}(R) + \Phi_K^{in}(R) \quad (55)$$

und da Φ_{inh} stetig ist bei $r=R$

$$\Phi_K^a(R) = \Phi_K^{in}(R) \quad (56)$$

also

$$\sum_{l=0}^{\infty} a_l R^l P_l(\cos \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\tilde{b}_l}{R^{l+1}} P_l(\cos \theta) \quad (57)$$

und damit (weil die LEGENDRE-Polynome unabhängig sind)

$$a_l R^l = \frac{\tilde{b}_l}{R^{l+1}} \quad (58)$$

Bedingung 4 kann man mit $D_n = \epsilon \epsilon_0 E_n = -\epsilon \epsilon_0 \frac{\partial \Phi}{\partial r}$ schreiben als

$$\epsilon_0 \left(-\frac{\partial}{\partial r} \Phi_{inh}^a - \frac{\partial}{\partial r} \Phi_K^a \right) \Big|_{r=R} = \epsilon \epsilon_0 \left(-\frac{\partial}{\partial r} \Phi_{inh}^{in} - \frac{\partial}{\partial r} \Phi_K^{in} \right) \Big|_{r=R} \quad (59)$$

Die Ableitung von Φ_{inh} erhält man dabei aus der Identität

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} = \frac{1}{r_>} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r_<}{r_>} \right)^l P_l(\cos \gamma) \quad (60)$$

wobei $r_{<} := \min(r, r_0)$, $r_{>} := \max(r, r_0)$ und $\gamma = \angle(\vec{r}, \vec{r}_0)$. Hier $r_0 > r = R$ und $\gamma = \theta$:

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} = \frac{1}{r_0} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r}{r_0}\right)^l P_l(\cos \theta) \quad (61)$$

Nun kann man in Gleichung (59) einsetzen

$$\sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{lR^{l-1}}{r_0^{l+1}} - \frac{\tilde{b}_l(l+1)}{R^{l+2}} \right) P_l(\cos \theta) = \epsilon \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{lR^{l-1}}{r_0^{l+1}} + la_l R^{l-1} \right) P_l(\cos \theta) \quad (62)$$

Wegen der Unabhängigkeit der LEGENDRE-Polynome muss wieder gelten

$$\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{lR^{l-1}}{r_0^{l+1}} - \frac{\tilde{b}_l(l+1)}{R^{l+2}} = \epsilon \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{lR^{l-1}}{r_0^{l+1}} + la_l R^{l-1} \right) \quad (63)$$

Löst man das Gleichungssystem (58), (63), so erhält man

$$\tilde{b}_l = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{R^{2l+1}}{r_0^{l+1}} \frac{l(\epsilon-1)}{l(\epsilon+1)+1} \quad (64)$$

und

$$a_l = \frac{\tilde{b}_l}{R^{2l+1}} = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_0^{l+1}} \frac{l(\epsilon-1)}{l(\epsilon+1)+1} \quad (65)$$

Damit

$$\Phi_K^a(r, \theta) = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{R}{r_0} \frac{1}{r} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{R^2/r_0}{r}\right)^l \frac{l(\epsilon-1)}{l(\epsilon+1)+1} P_l(\cos \theta) \quad (66)$$

$$\Phi_K^{in}(r, \theta) = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_0} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r}{r_0}\right)^l \frac{l(\epsilon-1)}{l(\epsilon+1)+1} P_l(\cos \theta) \quad (67)$$

Das eben gelöste Problem einer Punktladung vor einer dielektrischen Kugel beinhaltet als Grenzfall eine Reihe anderer elektrostatischer Probleme.

Punktladung vor nichtgeerdeter Metallkugel Führt man den Grenzübergang $\epsilon \rightarrow \infty$ aus, so ist das äußere Potential

$$\Phi_K^a(r, \theta) = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{R}{r_0} \frac{1}{r} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{R^2/r_0}{r}\right)^l P_l(\cos \theta) - \left(-\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{R}{r_0} \frac{1}{r} \right) \quad (68)$$

Der zweite Teil der Gleichung (68) ist gerade der zu $l = 0$ gehörende Summand im ersten Teil. Dieser muss wieder abgezogen werden, da in Gleichung (30) wegen $\tilde{b}_0 = 0$ der nullte Summand verschwindet, hier aber fälschlicherweise berücksichtigt wurde.

Wegen (60) kann man das Potential nun schreiben als

$$\Phi_K^a(r, \theta) = -\frac{QR/r_0}{4\pi\epsilon_0|\vec{r} - \frac{R^2}{r_0^2}\vec{r}_0|} + \frac{QR/r_0}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (69)$$

bzw.

$$\Phi^a(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0|\vec{r} - \vec{r}_0|} - \frac{QR/r_0}{4\pi\epsilon_0|\vec{r} - \frac{R^2}{r_0^2}\vec{r}_0|} + \frac{QR/r_0}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}|} \quad (70)$$

Dieses Potential entspricht aber formal gerade dem Potential der Punktladung Q im Abstand r_0 vom Mittelpunkt der Metallkugel und dem zweier Spiegelladungen: einer Spiegelladung $Q_S = -\frac{R}{r_0}Q$ am Ort $\vec{r}_S = \frac{R^2}{r_0^2}\vec{r}_0$ und einer weiteren Spiegelladung $Q' = -Q_S$ im Mittelpunkt der Kugel.

Daran sieht man, dass das Problem einer Punktladung vor einer nicht-geerdeten Metallkugel ebenso wie das einer Punktladung vor einer geerdeten Metallkugel mit der Methode der Spiegelladungen gelöst werden kann. Für eine Punktladung vor einer dielektrischen Kugel funktioniert hingegen die Spiegelladungsmethode nicht.

Punktladung vor dielektrischer Ebene Betrachte den Grenzfall $R, r_0, r \rightarrow \infty$ und halte die Abstände $r_0 - R$ und $r - R$ fest. In diesem Limes geht jeder Term in (66) und (67) zum Null. Z.B.:

$$(l = 1) \quad -\frac{1}{r} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{R}{r_0} \frac{R^2}{r_0 r} \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} P_1 \xrightarrow{R, r, r_0 \rightarrow \infty} 0$$

Man muss viele Terme (mit $l \gg 1$) summieren, um nichtverschwindenden Potential zu bekommen. Unter Näherung

$$\frac{l(\epsilon - 1)}{l(\epsilon + 1) + 1} \approx \frac{(\epsilon - 1)}{(\epsilon + 1)} \quad (\text{für } l \gg 1)$$

erhält man

$$\Phi_K^a(r, \theta) \xrightarrow{R, r, r_0 \rightarrow \infty} -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{R}{r_0} \frac{1}{r} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{R^2/r_0}{r}\right)^l \frac{(\epsilon - 1)}{(\epsilon + 1)} P_l(\cos \theta) = \frac{Q_s}{4\pi\epsilon_0|\vec{r} - \vec{r}_s|} \quad (71)$$

$$\Phi_K^{in}(r, \theta) \xrightarrow{R, r, r_0 \rightarrow \infty} -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_0} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r}{r_0}\right)^l \frac{(\epsilon - 1)}{(\epsilon + 1)} P_l(\cos \theta) = \frac{Q_s}{4\pi\epsilon_0|\vec{r} - \vec{r}_0|} \quad (72)$$

mit

$$Q_s = -\frac{(\epsilon - 1)}{(\epsilon + 1)} Q, \quad \vec{r}_s = \frac{R^2}{r_0} \hat{e}_z$$

Weil der Koordinatenursprung im Zentrum der Kugel gewählt wurde, sind die Vektoren in (60), (71) und (72) unendlich groß. Man verschiebt den Koordinatenursprung durch Subtrahieren des konstanten Vektors $R\hat{e}_z$

$$\vec{r}' = \vec{r} - R\hat{e}_z, \quad \vec{r}'_0 = \vec{r}_0 - R\hat{e}_z = h\hat{e}_z, \quad \vec{r}'_s = \frac{R^2}{r_0} \hat{e}_z - R\hat{e}_z \stackrel{r_0, R \rightarrow \infty}{=} -h\hat{e}_z.$$

Das gesamte Potential im neuen Koordinatensystem lautet:

$$\Phi(\vec{r}') = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}' - \vec{r}'_0|} + \frac{Q_s}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}' - \vec{r}'_s|} \quad (z' \geq 0)$$

$$\Phi(\vec{r}') = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}' - \vec{r}'_0|} + \frac{Q_s}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}' - \vec{r}'_0|} = \frac{2}{\epsilon + 1} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}' - \vec{r}'_0|} \quad (z' \leq 0)$$

Dielektrische Kugel im homogenen Feld Je weiter die Punktladung vom Kugel entfernt ist, desto mehr homogen das Feld im Bereich der Kugel wird. Da die Feldstärke im Limes $r_0 \rightarrow \infty$ abnimmt, vergrößert man die Ladung Q , um die Feldstärke konstant zu halten.

Betrachte den Grenzfall $r_0 \rightarrow \infty, Q \rightarrow \infty, -Q/4\pi\epsilon_0 r_0^2 = E_0 = \text{Konst.}$. Es gilt

$$\begin{aligned} \Phi_{inh}(r, \theta) &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_0} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_0^2} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{r^l}{r_0^{l-1}} P_l(\cos \theta) \\ &\xrightarrow{r_0 \rightarrow \infty} \text{const} - E_0 r \cos \theta = \text{const} - E_0 z \end{aligned} \quad (73)$$

$$\vec{E}_0 = -\vec{\nabla} \Phi_{inh} = E_0 \hat{e}_z$$

Bemerkung: Der konstante Term im Potential hat keine Auswirkung auf das Feld. Man setze $\text{const} = 0$

Für die Koeffizienten \tilde{b}_l und a_l des Potentials gilt dann

$$\tilde{b}_l = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_0^2} \frac{l(\epsilon - 1)}{l(\epsilon + 1) + 1} \frac{R^{2l+1}}{r_0^{l-1}} = E_0 \frac{l(\epsilon - 1)}{l(\epsilon + 1) + 1} \frac{R^{2l+1}}{r_0^{l-1}} \quad (74)$$

Im Grenzfall $r_0 \rightarrow \infty$ verschwinden alle \tilde{b}_l bis auf

$$\tilde{b}_1 = E_0 R^3 \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} \quad (75)$$

Ebenso gilt

$$a_l = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_0^2} \frac{l(\epsilon - 1)}{l(\epsilon + 1) + 1} \frac{1}{r_0^{l-1}} = E_0 \frac{l(\epsilon - 1)}{l(\epsilon + 1) + 1} \frac{1}{r_0^{l-1}} \quad (76)$$

Auch hier verschwinden alle a_l außer

$$a_1 = E_0 \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} \quad (77)$$

Damit sind das Potential und das Feld innerhalb der dielektrischen Kugel

$$\Phi^{in}(r, \theta) = -E_0 r \cos \theta + E_0 r \cos \theta \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} = -E_0 r \cos \theta \frac{3}{\epsilon + 2} \quad (78)$$

$$\vec{E}^{in}(r, \theta) = \frac{3}{\epsilon + 2} \vec{E}_0 \quad (79)$$

Im Außenraum gilt:

$$\Phi^a(r, \theta) = -E_0 r \cos \theta + E_0 r \cos \theta \frac{R^3}{r^3} \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} = -\vec{E}_0 \cdot \vec{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} \quad (80)$$

wobei das Dipolmoment

$$\vec{p} = 4\pi\epsilon_0 R^3 \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} \vec{E}_0 \quad (81)$$

verwendet wurde.