Zentralübung zur Vorlesung

Theoretische Physik II: Elektrodynamik

Blatt 2 Dr. A.Zharikov, Prof. R.Netz, TU München, WS 2009/2010

Aufgabe 4: Laplace-Gleichung in Kugelkoordinaten. Separationsansatz. Legendre-Polynome.

Der Laplace-Gleichung in Kugelkoordinaten (r, θ, φ) lautet:

$$\Delta\Phi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r}\Phi + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\Phi + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\Phi = 0$$

Eine partikuläre Lösung $\Phi = R(r)P(\theta)Q(\varphi)$ läßt sich durch die Eigenfunktionen der folgenden Operatoren

$$\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}Q = -m^2 Q \quad \to Q \sim e^{im\varphi}$$

$$\hat{A}(m)P(x) = \left(\frac{d}{dx}(1-x^2)\frac{d}{dx} - \frac{m^2}{1-x^2}\right)P(x) = -\lambda P(x) \quad (x = \cos\theta)$$

$$\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r}R(r) = \lambda R(r)$$

bestimmen. Aus der Bedingung $Q(0) = Q(2\pi)$ folgt $m = 0, \pm 1, \pm 2, ..$.

- (a) Betrachten Sie die Eigenwertproblem für P(x) im Falle $m = 0$.

$$\hat{A}(m=0)P(x) = \left(\frac{d}{dx}(1-x^2)\frac{d}{dx}\right)P(x) = -\lambda P(x),$$

Zeigen Sie, dass (nur) im Falle $\lambda = l(l+1)$, $(l = 0, 1, ...)$ die Funktion $P(x)$ nicht divergiert und ein Polynom l-ten Grades (sogenanntes Legendre-Polynom $P_l(x)$) ist. *Hinweis: Verwenden Sie die Darstelung* $P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *und leiten Sie mit Hilfe differentieller Gleichung eine Rekurenz-Formel für die Koeffizienen* a_k *ab.*
Nützliche Identität:

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k\right)'' = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k x^{k-2} = \sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(k+1)a_{k+2}x^k$$

.

- (b) Mit Hilfe der Darstellung für die assoziierten Legendre-Funktionen $P_l^m(x)$

$$P_l^m(x) = (-1)^m (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \left(\frac{d}{dx}\right)^m P_l(x) \qquad (m \geq 0)$$

  leiten Sie die folgende Operatoridentität ab:

$$\hat{A}(m) P_l^m(x) = \hat{A}(m)(1-x^2)^{\frac{m}{2}} \left(\frac{d}{dx}\right)^m P_l(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \left(\frac{d}{dx}\right)^m \hat{A}(m=0) P_l(x).$$

  Es folgt: Falls $P_l(x)$ die Eigenfunktion zu $\hat{A}(m=0)$ ist

$$\hat{A}(m=0) P_l(x) = \left(\frac{d}{dx}(1-x^2)\frac{d}{dx}\right) P_l(x) = -\lambda(l) P_l(x),$$

  sind $P_l^m(x)$ die Eigenfunktionen des Operators $\hat{A}(m)$ zu der gleichen Eigenwert.

Hinweis: Beweisen Sie zuerst die Gleicheit

$$\hat{A}(m)(1-x^2)^{\frac{m}{2}} f(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} ((1-x^2) f'' - 2(m+1) x f' - m(m+1) f).$$

Verwenden Sie weiter die Darstellung $f(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^m P_l(x)$ *und die nützliche Operatoridentität*

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^{m+1} (1-x^2) = (1-x^2) \left(\frac{d}{dx}\right)^{m+1} - 2(m+1) x \left(\frac{d}{dx}\right)^m - m(m+1) \left(\frac{d}{dx}\right)^{m-1}.$$

- (c) Zeigen Sie, dass die Eigenfunktionen der radialen Gleichung die Form $R(r) \sim r^l, \frac{1}{r^{l+1}}$ haben und die allgemeine Lösung der Laplace-Gleichung in Kugekkoordinaten lautet

$$\Phi(r,\theta,\phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} (a_{lm} r^l + \frac{b_{lm}}{r^{l+1}}) P_l^m(\cos\theta)\, e^{im\varphi}$$

Aufgabe 5: Dielektrische Kugel

Betrachten Sie eine dielektrische Kugel (Radius R, Dielektrizitätskonstante ε) im Vakuum. Eine Ladung Q wurde in die Position $\vec{a} = (0,0,a)$ bezüglich des Kugelzentrums eingebracht ($a > R$).

- (a) Unter Darstellung für das gesamte Potential

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r}-\vec{a}|} + \Phi_m(\vec{r})$$

  finden Sie das Potential $\Phi_m(r)$ innerhalb und ausserhalb der Kugel.

- (b) Diskutieren Sie die folgende Grenzfälle

  (1) einer nicht-geerdeten Metallkugel ($\varepsilon \to \infty$)
  (2) einer Punktladung im Abstand h von einer dielektrischen Ebene ($R, a \to \infty, h = a - R = const$)
  (3) einer dielektrischen Kugel im homogenen Feld ($a \to \infty, Q \to \infty$, $Q/4\pi\varepsilon_0 a^2 = E_0 = const$)

Hinweis: Zeigen Sie, dass sich Φ_m im Falle einer azimutalen Symmetrie in allgemeiner Form

$$\Phi_m^{(in)}(r,\vartheta) = \sum_{l=0}^{\infty}\left[a_l r^l + \frac{b_l}{r^{l+1}}\right] P_l(\cos\vartheta) \quad (r \le R)$$

$$\Phi_m^{(a)}(r,\vartheta) = \sum_{l=0}^{\infty}\left[\tilde{a}_l r^l + \frac{\tilde{b}_l}{r^{l+1}}\right] P_l(\cos\vartheta) \quad (r \ge R)$$

repräsentieren läßt. Bestimmen Sie die Koeffizienten mit Hilfe der Randbedingungen bei $r = 0, \infty, R$ und der Zerlegung

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_0|} = \frac{1}{r_>}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{r_<}{r_>}\right)^l P_l(cos\vartheta), \quad r_> = max\{r, r_0\},\ r_< = min\{r, r_0\},$$

wobei ϑ der Winkel zwischen den Vektoren $\vec{r}$ und $\vec{r}_0$ ist.