Zentralübung zur Vorlesung

Theoretische Physik II: Elektrodynamik

Blatt 1 (Lösungen) Dr. A.Zharikov, Prof. R.Netz, TU München, WS 2009/2010

Aufgabe 1: Poisson-Gleichung. Fourier-Transformation.

(a) Lösen Sie die Poisson-Gleichung für eine Punktladung q durch Fourier-Transformation. Die Randbedingung an das Potential $\Phi(\vec{r})$ laute

$$\lim_{r\to\infty} \Phi(\vec{r}) = 0, \qquad r \equiv |\vec{r}|$$

Hinweis: $\int_0^\infty \sin x \, dx/x = \pi/2$

(b) Im Grundzustand des Waserstoffatoms ist die Elektronenladung näherungsweise mit der Dichte

$$\rho_e(\vec{r}) = -\frac{e\,\alpha^3}{8\pi} \exp\big(-\alpha r\big), \quad \alpha = \frac{2}{a_B}$$

verteilt, worin a_B der Bohrsche Radius ist und e die Elementarladung ist.

Mittels der Fourier-Transformation berechnen Sie das Potential des Wasserstoffatoms unter Annahme, dass die Kernladung punktförmig im Ursprung lokalisiert ist.

Lösung

3D-Fourier-Transformation:

$$FT\{f(\vec{r})\} = \tilde{f}(\vec{k}) = \int e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} f(\vec{r}) d^3r \quad , \quad f(\vec{r}) = (1/2\pi)^3 \int e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \tilde{f}(\vec{k}) d^3k$$

Die Funktion $\tilde{f}(\vec{k})$ nennt man als Fourier-Transformierte von Funktion $f(\vec{r})$.
Bemerkung: In der Literatur verwendet man auch andere Definitionen für die Fourier-Transformation

$$\Delta\Phi(\vec{r}) = -\frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0} \qquad \text{FT} \Rightarrow \qquad -k^2\tilde{\Phi}(\vec{k}) = -\frac{\tilde{\rho}(\vec{k})}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \tilde{\Phi}(\vec{k}) = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{\tilde{\rho}(\vec{k})}{k^2}$$

(a) Ladung q im Punkt $\vec{r}_0$: $\qquad \rho(\vec{r}) = q\delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{r}_0)$

$$\tilde{\rho}(\vec{k}) = q\int e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{r}_0) d^3r = qe^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}_0} \qquad \tilde{V}(\vec{k}) = \frac{qe^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}_0}}{\varepsilon_0 k^2} \qquad ,$$

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{q}{\varepsilon_0(2\pi)^3}\int_0^\infty \frac{1}{k^2}k^2dk\int_{-1}^{1} e^{ik|\vec{r}-\vec{r}_0|\cos\gamma}d\cos\gamma\int_0^{2\pi}d\phi = \frac{q4\pi}{\varepsilon_0(2\pi)^3}\int_0^\infty \frac{\sin(k|\vec{r}-\vec{r}_0|)}{k|\vec{r}-\vec{r}_0|}dk$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r}-\vec{r}_0|} \qquad (\gamma - \text{Winkel zwischen} \quad \vec{k} \quad \text{und} \quad \vec{r}-\vec{r}_0)$$

b)

$$\rho(\vec{r}) = \rho_p(\vec{r}) + \rho_e(\vec{r}) = e\delta^{(3)}(\vec{r}) - \frac{e\,\alpha^3}{8\pi}\exp\big(-\alpha r\big)$$

$$FT\{\rho_p(\vec{r})\} = \tilde{\rho}_p(\vec{k}) = e$$

$$FT\{\rho_e(\vec{r})\} = \tilde{\rho}_e(\vec{k}) = -\frac{e\,\alpha^3}{8\pi}\int_0^\infty e^{-\alpha r}r^2dr\int_{-1}^{1}e^{-ikr\cos\gamma}d\cos\gamma\int_0^{2\pi}d\phi$$

$$= -\frac{e\,\alpha^3}{4ik}\int_0^\infty e^{-\alpha r}(e^{ikr}-e^{-ikr})\,rdr = -\frac{e\,\alpha^3}{4ik}\left(-\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)\int_0^\infty e^{-\alpha r}(e^{ikr}-e^{-ikr})\,dr$$

$$= -\frac{e\alpha^4}{(\alpha^2+k^2)^2}$$

$$\tilde{\rho}(\vec{k}) = \tilde{\rho}_p(\vec{k}) + \tilde{\rho}_e(\vec{k}) = e\frac{2\alpha^2k^2+k^4}{(\alpha^2+k^2)^2} \qquad \Rightarrow$$

$$\tilde{\Phi}(\vec{k}) = \frac{e}{\varepsilon_0}\frac{2\alpha^2+k^2}{(\alpha^2+k^2)^2} = \frac{e}{\varepsilon_0}\frac{\alpha^2}{(\alpha^2+k^2)^2} + \frac{e}{\varepsilon_0}\frac{1}{(\alpha^2+k^2)} = -\frac{\tilde{\rho}_e(\vec{k})}{\alpha^2\varepsilon_0} + \frac{e}{\varepsilon_0}\frac{1}{(\alpha^2+k^2)}$$

Bei der Rücktransformation des ersten Terms ergibt sich der Beitrag $-\rho_e(\vec{r})/\alpha^2\varepsilon_0$ in das Potential. Berechne den Beitrag vom zweiten Term.

$$\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{e}{\varepsilon_0}\frac{1}{(\alpha^2+k^2)}e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}d^3r = \frac{e}{(2\pi)^3\varepsilon_0}\int_0^\infty\frac{1}{\alpha^2+k^2}k^2dk\int_{-1}^{1}e^{ikr\cos\gamma}d\cos\gamma\int_0^{2\pi}d\phi =$$

$$= \frac{e2\pi}{(2\pi)^3\varepsilon_0(ir)}\int_0^\infty\frac{1}{\alpha^2+k^2}(e^{ikr}-e^{-ikr})kdk = \frac{e}{(2\pi)^2\varepsilon_0(ir)}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{k}{\alpha^2+k^2}e^{ikr}dk =$$

$$= \frac{e}{(2\pi)^2\varepsilon_0(ir)}2\pi i\,Res\left(\frac{ke^{ikr}}{\alpha^2+k^2}\right)\Big|_{k=i\alpha} = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r}e^{-\alpha r}$$

Bemerkung: In der letzten Zeile wurde der Residuensatz verwendet.

Das Potential des Wasserstoffatomes lautet:

$$\Phi(r) = -\frac{\rho_e(\vec{r})}{\alpha^2\varepsilon_0} + \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r}e^{-\alpha r} = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r}\left(1+\frac{\alpha r}{2}\right)e^{-\alpha r}$$

Aufgabe 2: Laplace-Gleichung in kartesischen Koordinaten.

Separation von Variablen

Das Volumen $V = \{\vec{r} : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq \infty, -\infty \leq z \leq \infty\}$ sei durch Metallplaten begrenzt. Die beiden Seitenplatten ($x = 0, x = a$) seien geerdet; die Bodenplatte ($y = 0$) habe das Potential Φ_0. Alle Metallkörper seien voneinander isoliert. Bestimmen Sie das Potential $\Phi(x, y, z)$ zwischen den Platten mit Hilfe der Laplace-Gleichung.
Hinweis: $\ln(1 + Z) = -\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n Z^n/n$, *worin* Z *eine komplexe Zahl ist.*

Lösung

Laplace-Gleichung: $\Delta\Phi(x, y, z) = 0, \quad \vec{r} \in V$.
Randbedingungen:

$$RB1 : \Phi(x = 0, y, z) = 0, \qquad RB2 : \Phi(x = a, y, z) = 0,$$

$$RB3 : \Phi(x, y \to \infty, z) < \infty \text{ (divergiert nicht)}, \quad RB4 : \Phi(x, y = 0, z) = \Phi_0$$

Wegen der Translationssymmetrie entlang der z-Achse ist die Lösung z-unabhängig ($\Phi = \Phi(x, y)$) .

Partikuläre Lösung (Separation von Variablen):

$$\Phi(x, y) = X(x)Y(y)$$

$$\Delta\Phi = 0, \qquad X''Y + XY'' = 0 \quad \Rightarrow$$
$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)}$$

Die Gleichheit soll für alle $x, y \in V$ gelten. Dies kann man erfüllen, falls die beide Seiten zu einer Konstanten α gleich sind. Fixiere z. B. $x = x_1$. Die linke Seite ist eine reele feste Zahl. Für alle y muss die rechte Seite gleich dieser festen Zahl sein. Da $\frac{Y''(y)}{Y(y)}$ von x unabhängig ist, folgt

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \alpha, \quad -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = \alpha \quad (\alpha = const)$$

Für positive α gibt es keine nicht-triviale Lösungen $X(x) \not\equiv 0$, die die Randbedingungen RB1 und RB2 gleichzeitig erfüllen.

$$(\alpha > 0) \quad X(x) = A\cosh\sqrt{\alpha}x + B\sinh\sqrt{\alpha}x$$

$$RB1 \Rightarrow \; A = 0, \quad RB2 \Rightarrow B\sinh\sqrt{\alpha}a = 0 \quad \Rightarrow \; B = 0 \Rightarrow X(x) \equiv 0$$

Es folgt, dass die Separationskonstante α negative sein muss.

$$\alpha = -\mu^2, \quad X(x) = A\cos\mu x + B\sin\mu x, \quad Y(y) = Ce^{-\mu y} + De^{\mu y}$$

$$\Phi(x,y) = (A\cos\mu x + B\sin\mu x)(Ce^{-\mu y} + De^{\mu y})$$

$$RB1 \Rightarrow \; A = 0, \quad RB2 \Rightarrow \; \mu = \frac{n\pi}{a}, \quad (n = 1, 2, 3, ...), \quad RB3 \Rightarrow \; D = 0$$

$$\Rightarrow \quad \Phi(x,y) = \tilde{B}\sin(\frac{n\pi x}{a})e^{-\frac{n\pi y}{a}}$$

Im Falle RB4 $\Phi(x, y = 0) \propto \sin(\frac{n\pi x}{a})$ würde eine partikuläre Lösung die Lösung des Problems.

"Allgemeine" Lösung:

$$\Phi(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{B}_n \sin(\frac{n\pi x}{a})e^{-\frac{n\pi y}{a}}$$

$$RB4 \Rightarrow \quad \Phi(x, y = 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{B}_n \sin(\frac{n\pi x}{a}) = \Phi_0$$

Man kann die Koeffizienten $\tilde{B}_n$ mittels der Orthogonalitätseigeschaften der Eigenfunktionen

$$\int_0^a \sin(\frac{n\pi x}{a})\sin(\frac{m\pi x}{a})dx = \frac{a}{2}\delta_{nm}$$

berechnen (Alternative: Theorie diskreter Fourier-Reihen für periodische Funktionen).

$$\Rightarrow \quad \tilde{B}_n = \frac{2}{a}\int_0^a \Phi_0 \sin(\frac{n\pi x}{a})dx = \frac{2\Phi_0}{\pi n}[1 - \cos n\pi] = \frac{2\Phi_0}{\pi n}[1 - (-1)^n]$$

Antwort: Mittels der Hilfsfunktion

$$Z(x,y) = e^{-\pi(y-ix)/a}, \quad Im(Z^n) = \sin(\frac{n\pi x}{a})e^{-\frac{n\pi y}{a}}$$

bekommt man

$$\Phi(x,y) = \frac{2\Phi_0}{\pi} Im \sum_n^{\infty} [1 - (-1)^n]\frac{Z^n}{n} = \frac{2V_0}{\pi} Im\Big[\ln\frac{(1+Z)}{(1-Z)}\Big] = \frac{2\Phi_0}{\pi}\,\phi,$$

wobei die Phase ϕ gleich dem Argument von $\frac{(1+Z)}{(1-Z)}$ ist.

$$\frac{(1+Z)}{(1-Z)} = \frac{(1+Z)(1-Z^\star)}{|1-Z|^2} = \frac{1 - |Z|^2 + 2iImZ}{|1-Z|^2}$$

$$\tan\phi = \frac{2ImZ}{1-|Z|^2} = \frac{\sin(\frac{\pi x}{a})}{\sinh(\frac{\pi y}{a})}$$

$$\Phi(x,y) = \frac{2\Phi_0}{\pi}\,\arctan\left(\frac{\sin\frac{\pi x}{a}}{\sinh\frac{\pi y}{a}}\right)$$

Bemerkung: Allgemeine Lösung ist nicht-separabel.

Aufgabe 3: Energie elektrischer Felder

Berechnen Sie die elektrostatische Energie einer geladenen Kugel mit Radius R und die Gesamtladung Q für den Fall, dass Q

(i) homogen im Volumen verteilt ist,

(ii) homogen auf Oberfläche verteilt ist

Diskutieren Sie die Ergebnisse in (i) und (ii).

Lösung

Energie einer Ladungsverteilung (elektrischer Felder) im Vakuum:

$$W_e = \frac{1}{2}\int \rho(\vec{r})\Phi(\vec{r})d^3r = \frac{\varepsilon_0}{2}\int |\vec{E}(r)|^2 d^3r$$

(i) Vorlesung

$$\vec{E} = E(r)\hat{e}_r, \quad E(r) = \frac{Q\,r}{4\pi\varepsilon_0 R^3} \quad (r \leq R), \quad E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \quad (r \geq R)$$

$$W_e = \frac{\varepsilon_0}{2}\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2\left[\int_0^R \frac{r^2}{R^6}\,4\pi r^2 dr + \int_R^\infty \frac{1}{r^4}\,4\pi r^2 dr\right] = \frac{6}{5}\,\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}$$

(ii)

$$\vec{E} = E(r)\hat{e}_r, \quad E(r) = 0 \quad (r < R), \quad E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \quad (r \geq R)$$

$$W_e = \frac{\varepsilon_0}{2}\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2\int_R^\infty \frac{1}{r^4}\,4\pi r^2 dr = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}$$