

Theoretische Physik II (Elektrodynamik) – Präsenzübung 1

Übungsblatt 5 wird in der Woche vom 30.11 bis 4.12 besprochen.

Aufgabe 1 – Laplacegleichung in Zylinderkoordinaten

a) Zeigen Sie, dass der Laplace-Operator in Zylinderkoordinaten gegeben ist als

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

b) Zerlegen Sie die Laplace-Gleichung

$$\Delta \Phi = 0$$

mit einem Separationsansatz in drei unabhängige Gleichungen für ρ , ϕ und z .

c) Bestimmen Sie die Eigenfunktionen

$$Z_k(z)$$

$$Q_\nu(\phi),$$

wobei k und ν Konstanten sind. Welche Bedingungen ergeben sich für k und ν ?

d) Die ρ -Abhängigkeit wird durch die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 R(\rho)}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dR(\rho)}{d\rho} + \left(k^2 - \frac{\nu^2}{\rho^2}\right) R(\rho) = 0 \quad (1)$$

bestimmt. Gehen Sie zur Bestimmung der Lösungen von einem Potenzreihenansatz $R(x) = x^\alpha \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j$ mit $x = k\rho$ aus. Bestimmen Sie die Rekursionsrelationen der Koeffizienten a_j . Zeigen Sie, dass die Besselfunktionen

$$J_\nu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j! \Gamma(j + \nu + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2j}$$

Lösungen von (1) sind. Die Gammafunktion wird für ganzzahlige Argumente durch $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$ und $\Gamma(1) = 1$ bestimmt.

e) Für $k = 0$ vereinfacht sich (1) zu einer Eulerschen Differentialgleichung:

$$\frac{d^2 R(\rho)}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dR(\rho)}{d\rho} - \frac{\nu^2}{\rho^2} R(\rho) = 0.$$

Bestimmen Sie die Lösungen $R_\nu(\rho)$.

Aufgabe 2 – Erzeugende Funktion der Legendrepolynome

Die Legendre-Polynome $P_l(\cos \theta)$ werden durch

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r'^l}{r^{l+1}} P_l(\cos \theta),$$

erzeugt, wobei $r r' = r r' \cos \theta$ gilt.

a) Überprüfen Sie die Relation explizit für die ersten drei Terme in $\frac{r'^l}{r^{l+1}}$.

b) Beweisen Sie für $\cos \theta = 1$ die Relation durch eine Entwicklung von $\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$ in einer Taylor-Reihe.