

Theoretische Physik 2: Elektrodynamik

Technische Universität München, Wintersemester 2008/09, Harald Friedrich

1. Elektrostatik

elektrische Ladung, elektrisches Feld, elektrostatisches Potenzial, dielektrisches Medium

2. Magnetostatik

magnetische Kräfte, Magnetfeld, Magnetostatik im Medium

3. Zeitabhängige Felder

Maxwellgleichungen, Wellen, Strahlung

4. Relativistische Formulierung der Elektrodynamik

Lorentz-Transformation, 4-er Vektoren, Feldtensor

Mathematische Ergänzungen

Deltafunktion, Differentiation und Integration von Vektorfeldern, Sätze von Gauß, Kugelflächenfunktionen

Lehrbücher

- J. D. Jackson, [Klassische Elektrodynamik](#) (4. Aufl.), Walter de Gruyter, Berlin 2006 (sehr umfassend)
- W. Nolting, [Elektrodynamik](#), Verlag Zimmermann-Neufang, Ulmen, 1990 (ausführlich)
- T. Fließbach, [Elektrodynamik](#), (4. Aufl.), Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, 2004 (kompakt)
- E. Rebhan, [Theoretische Physik: Elektrodynamik](#), Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, 2006 (neu)

1. ELEKTROSTATIK

Es gibt zwei Arten elektrischer Ladung, “positiv” und “negativ”. Die Einheit: ein “Coulomb” (C) = 1 Ampere \times 1 Sekunde. Ein Ampere ist die Stärke des elektrischen Stroms, der in zwei dünnen unendlichen parallelen Drähten im Abstand von 1 m fließt, wenn diese sich dadurch mit einer Kraft von 2×10^{-7} Newton pro Meter der Drähte anziehen (s. S. 27).

Ladung tritt nur in ganzzahligen Vielfachen der *Elementarladung* $e_0 = 1,602176462(63) \times 10^{-19}$ C auf. Ladung eines Elektrons: $-e_0$.

Die Kraft \vec{F}_{12} , die eine Ladung q_1 am Ort \vec{r}_1 durch eine Ladung q_2 am Ort \vec{r}_2 erfährt, ist

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2} \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} . \quad \text{Coulombsches Gesetz}$$

Dielektrizitätskonstante des Vakuums (s. auch S. 27, 36):

$$\epsilon_0 = 8,854187817 \dots \times 10^{-12} \text{ C}/(\text{Vm}); [1 \text{ V (Volt)}=1 \text{ Joule/C}]$$

$$4\pi\epsilon_0 = 10^7 \frac{\text{A}^2}{\text{N}} \frac{1}{c_0^2}, \quad c_0 = 2,99792458 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (\text{Lichtgeschwindigkeit})$$

Elektrisches Feld: Sei $\vec{F}_q(\vec{r})$ die Kraft, welche eine *kleine* Probeladung q am Ort \vec{r} erfährt. Das elektrische Feld \vec{E} an diesem Ort ist definiert als $\vec{E}(\vec{r}) = \lim_{q \rightarrow 0} \vec{F}_q(\vec{r})/q$. [Einheit: N/C=V/m]

Das elektrische Feld einer bei $\vec{r} = 0$ ruhenden Punktladung q folgt

aus dem Coulombschen Gesetz:
$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} .$$

Superpositionsprinzip: Mehrere (ruhende) Ladungen q_i an den Orten \vec{r}_i

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} .$$

Elektrostatisches Potenzial

$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\Phi(\vec{r})$: “ $\Phi(\vec{r})$ ist das elektrostatische Potenzial zu $\vec{E}(\vec{r})$ ”.

Beispiel 1, Punktladung q am Ursprung: $\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} + \text{Konstante}$,

Beispiel 2, Punktladungen q_i bei \vec{r}_i : $\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} + \text{Konstante}$,

kontinuierliche Ladungsverteilung $\rho(\vec{r}')$: $\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r' + \text{Konstante}$

Elektrisches Feld einer kontinuierlichen Ladungsverteilung:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3r' .$$

Kraft durch elektrostatisches Feld \vec{E} auf Punktladung Q am Ort \vec{r} :

$$\vec{F} = Q \vec{E}(\vec{r}) .$$

Bestimmungsgleichungen für elektrostatische Felder

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3r' \implies \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0} .$$

Integrale Form : $\oint_{\Omega(V)} \vec{E} \cdot d\vec{\omega} = \frac{Q}{\epsilon_0} , \quad Q = \int_V \rho(\vec{r}) d^3r .$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi \implies \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -\Delta\Phi ,$$

Potenzialgleichung : $\Delta\Phi + \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0 , \quad \text{Poissongleichung}$

Allgemeine Lösung der Potenzialgleichung,

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r' + \Phi_{\text{hom}} ,$$

Φ_{hom} ist eine (beliebige) Lösung der homogenen Gleichung: $\Delta\Phi_{\text{hom}} = 0$.

Wichtiges Beispiel : $\rho(\vec{r}) = \sigma\delta(z) \implies \lim_{z \rightarrow 0_+} E_z - \lim_{z \rightarrow 0_-} E_z = \frac{\sigma}{\epsilon_0} .$

Leiter, Randbedingungen

Im Inneren eines idealen Leiters ist $\vec{E} = 0 \implies \rho = 0, \quad \Phi = \text{const.}$

An der (äußeren) Oberfläche eines Leiters gilt: $\vec{E}_{\text{au\ss}} = \sigma \hat{e}_n / \epsilon_0.$

Für einen Leiter mit Ladung Q und endlichem Volumen V gilt:

$$\frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \oint_{\Omega(V)} \sigma |d\vec{\omega}| = \oint_{\Omega(V)} \vec{E}_{\text{au\ss}} \cdot d\vec{\omega} = - \oint_{\Omega(V)} (\vec{\nabla} \Phi) \cdot d\vec{\omega}.$$

Mehrere Leiter \mathcal{L}_i im Raum, für elektrostatisches Feld dazwischen:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -\Delta \Phi = \frac{\rho}{\epsilon_0}; \quad (*)$$

ist der Raum zwischen den Leitern ladungsfrei, dann ist $\rho = 0.$

- Mögliche Randbedingungen:
- (i) Ladung auf \mathcal{L}_i ist Q_i
 - (ii) Potenzial auf \mathcal{L}_i ist Φ_i

Die Differentialgleichung(en) (*) und die Randbedingung (i) oder (ii) bestimmen \vec{E} bzw. Φ (bis auf globale Konstante) eindeutig.

Ein **Kondensator** besteht typischerweise aus zwei voneinander isolierten Leitern \mathcal{L}_1 und \mathcal{L}_2 , welche die elektrische Ladung Q bzw. $-Q$ tragen. Die *Potenzialdifferenz* $U = \Phi_{\mathcal{L}_1} - \Phi_{\mathcal{L}_2}$ hängt von der geometrischen Anordnung und dem elektrischen Feld zwischen den

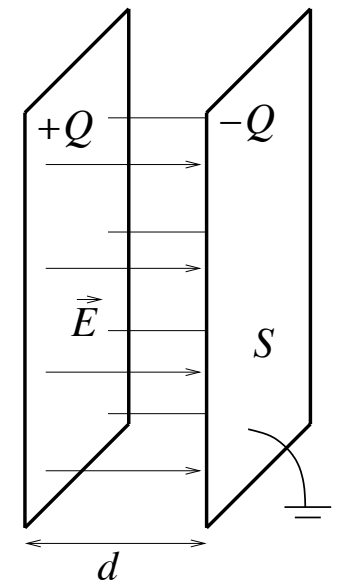
Leitern ab, $U = \int_{\mathcal{L}_1}^{\mathcal{L}_2} \vec{E} \cdot d\vec{r}$. Die *Kapazität* ist: $C = \frac{|Q|}{U}$.

Beispiel, Plattenkondensator: Zwei Platten, Abstand d , Fläche S , Ldg Q ($\Rightarrow \sigma = Q/S$) \rightarrow (fast) homogenes Feld \vec{E} ,

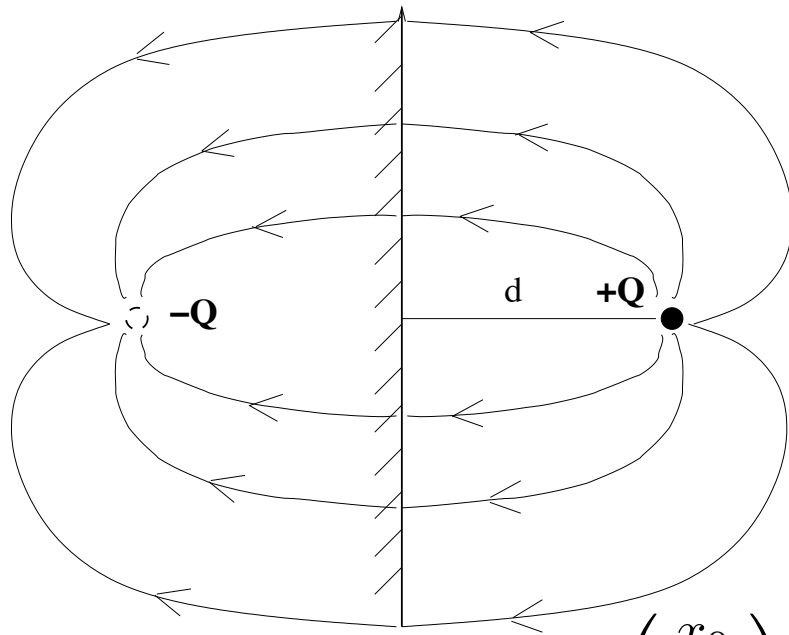
$$|\vec{E}| = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0 S} \Rightarrow U = |\vec{E}|d = \frac{Qd}{\epsilon_0 S}; \quad C = \frac{Q}{U} = \frac{\epsilon_0 S}{d}.$$

Arbeitsaufwand beim Aufladen: $dA = U(Q')dQ' = \frac{Q'}{C}dQ'$;

gespeicherte Energie: $A = \int_0^Q \frac{Q'}{C}dQ' = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} QU = \frac{1}{2} CU^2.$



Methode der Spiegelladungen



Betrachte eine (positive) Punktladung Q am Ort $\vec{r}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ d \end{pmatrix}$ im Abstand d von einem Leiter, der den Halbraum $z \leq 0$ füllt; x - y -Ebene ist Leiteroberfläche. Die *Spiegelladung* ist die Punkt-

ladung $-Q$ am Ort $\vec{r}_s = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ -d \end{pmatrix}$, und das elektrische Feld, das von

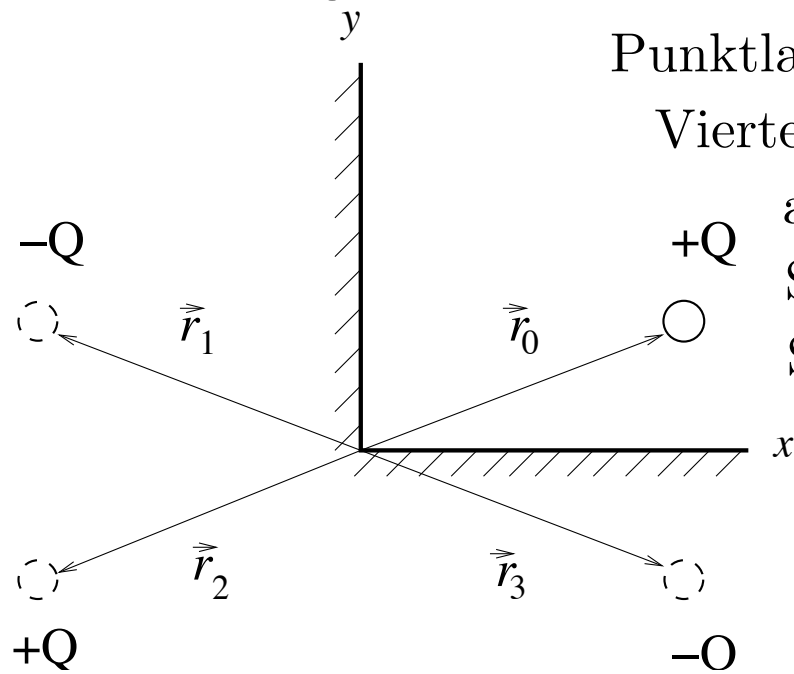
Ladung und Spiegelladung ausgeht ist
$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3} - \frac{\vec{r} - \vec{r}_s}{|\vec{r} - \vec{r}_s|^3} \right).$$

Für $z > 0$ gilt $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0$; an Leiteroberfläche ist $E_x = E_y = 0$.

Die durch die Punktladung Q *influenzierte* Ladungsdichte $\sigma(x, y)$ erzeugt außerhalb des Leiters ($z > 0$) dasselbe Feld wie die Spgldg.

Die Methode der Spiegelladungen kann in machen Anordnungen geeigneter Symmetrie genutzt werden, um das elektrische Feld im Raum außerhalb der Leiter zu berechnen. Weiteres Beispiel:

Rechtwinkelige Ecke, Leiter füllt Dreiviertelraum $x \leq 0$ oder $y \leq 0$:



Punktladung $+Q$ am Ort \vec{r}_0 im leiterfreien Viertelraum $x > 0$ und $y > 0$, Spiegelung an y - z -Ebene \rightarrow SpLdg $-Q$ bei \vec{r}_1 , Spiegelung an x - z -Ebene \rightarrow weitere SpLdgn: $+Q$ bei \vec{r}_2 und $-Q$ bei \vec{r}_3 .

Elektrisches Feld:

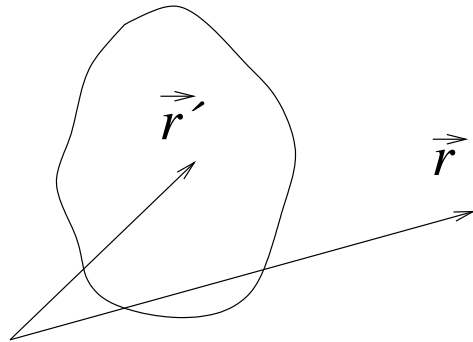
im Leiter: $\vec{E} = 0$;

im Viertelraum $x \geq 0$ und $y \geq 0$:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3} - \frac{\vec{r} - \vec{r}_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3} + \frac{\vec{r} - \vec{r}_2}{|\vec{r} - \vec{r}_2|^3} - \frac{\vec{r} - \vec{r}_3}{|\vec{r} - \vec{r}_3|^3} \right) .$$

Multipolkomponenten des elektrostatischen Feldes

Räumlich begrenzte Ladungsverteilung: $\rho(\vec{r}') = 0$ f. $|\vec{r}'| > d$.



Potenzial:
$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r'$$

Taylor-Entwicklung:
$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{r} + \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^3} + \frac{3(\vec{r} \cdot \vec{r}')^2 - r^2 r'^2}{2r^5} + \frac{1}{r} O\left(\left(\frac{r'}{r}\right)^3\right)$$

Entsprechende Entwicklung des Potentials:
$$\Phi(\vec{r}) = \Phi_0 + \Phi_1 + \Phi_2 + O\left(\frac{1}{r^4}\right).$$

Monopol-Term:
$$\Phi_0(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}, \quad Q = \int \rho(\vec{r}') d^3r' \quad (Q = \text{Gesamtladung}),$$

Dipol-Term:
$$\Phi_1(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} \cdot \vec{p}}{r^3}, \quad \vec{p} = \int \vec{r}' \rho(\vec{r}') d^3r' \quad (\vec{p} = \text{Dipolmoment}),$$

Elektrisches Dipolfeld:
$$\vec{E}_1(\vec{r}) = -\vec{\nabla} \Phi_1(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(3 \frac{(\vec{r} \cdot \vec{p}) \vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3} \right).$$

Quadrupolfeld

$$\Phi_2(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2r^5} \int \rho(\vec{r}') \left(3(\vec{r} \cdot \vec{r}')^2 - r^2 r'^2 \right) d^3r' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2r^5} \times$$

$$\left[\tilde{Q}_{xx}(3x^2 - r^2) + \tilde{Q}_{yy}(3y^2 - r^2) + \tilde{Q}_{zz}(3z^2 - r^2) + 6xy\tilde{Q}_{xy} + 6yz\tilde{Q}_{yz} + 6zx\tilde{Q}_{zx} \right],$$

wobei $\tilde{Q}_{xx} = \int x'^2 \rho(\vec{r}') d^3r'$, etc., $\tilde{Q}_{xy} = \int x'y' \rho(\vec{r}') d^3r'$, etc.

\tilde{Q}_{ij} ist ein *zweistufiger Tensor*, wie auch der zweistufige *Ortstensor*

$$\tilde{R}_{ij} = \begin{pmatrix} xx & xy & xz \\ yx & yy & yz \\ zx & xy & zz \end{pmatrix}.$$

Ein zweistufiger Tensor ist durch das Transformationsverhalten seiner Komponenten bei Drehungen im dreidimensionalen Raum charakterisiert.

Bei einer Drehung wird das Verhalten der Komponenten eines

einstufigen Tensors — also eines Vektors $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$ — durch

eine orthogonale 3×3 -Matrix \mathcal{O} bestimmt: $v_i \rightarrow v'_i = \sum_{j=1}^3 \mathcal{O}_{ij} v_j$.

Das Transformationsverhalten der Komponenten eines zweistufigen

Tensors \tilde{T} ist entsprechend: $\tilde{T}_{ij} \rightarrow \tilde{T}'_{ij} = \sum_{k,l=1}^3 \mathcal{O}_{ik} \mathcal{O}_{jl} \tilde{T}_{kl}$. Dabei bleibt

die Spur $\sum_i \tilde{T}_{ii}$ konstant, d.h. die Spur ist ein Skalar. Wenn man $\frac{1}{3} \delta_{ij} \text{Spur}(\tilde{T})$ von \tilde{T} abzieht, erhält man den spurlosen zweistufigen

Tensor T mit denselben Nichtdiagonalelementen wie \tilde{T} : $T_{ij} = \tilde{T}_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \sum_{l=1}^3 \tilde{T}_{ll}$.

$\Phi_2(\vec{r}) = \frac{3}{8\pi\epsilon_0 r^5} \sum_{i,j=1}^3 \tilde{Q}_{ij} R_{ij}$ mit dem spurlosen Ortstensor $R_{ij} = \tilde{R}_{ij} - \frac{r^2}{3} \delta_{ij}$.

Der Ausdruck für Φ_2 ändert sich nicht, wenn man \tilde{Q} durch den

spurlosen Quadrupoltensor $Q_{ij} = \int \left(x'_i x'_j - \delta_{ij} \frac{r'^2}{3} \right) \rho(\vec{r}') dr'$ ersetzt:

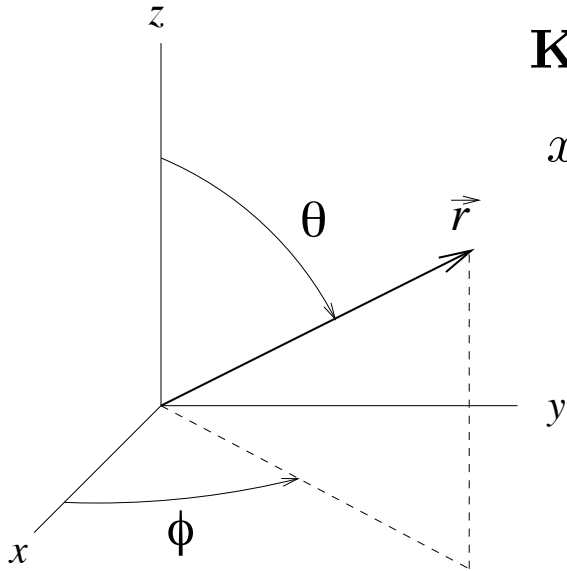
$$\Phi_2(\vec{r}) = \frac{3}{8\pi\epsilon_0 r^5} \sum_{i,j=1}^3 Q_{ij} R_{ij} .$$

Da Q_{ij} symmetrisch ist, gibt es eine Drehung der Koordinaten im 3-dimensionalen Raum, welche den Quadrupoltensor diagonalisiert:

$$Q_{ij} \rightarrow Q'_{ij} = \sum_{k,l=1}^3 \mathcal{O}_{ik} \mathcal{O}_{jl} Q_{kl} = (\mathcal{O} Q \mathcal{O}^T)_{ij} = Q'_{ii} \delta_{ij}$$

Bei entsprechender Wahl des Koordinatensystems, sind nur die drei Diagonalelemente Q_{xx} , Q_{yy} , Q_{zz} des Quadrupoltensors von Null verschieden, und $Q_{xx} + Q_{yy} + Q_{zz} = 0$. Bei Axialsymmetrie, oBdA $Q_{xx} = Q_{yy} = -\frac{1}{2} Q_{zz}$, ist nur ein Quadrupolmoment wichtig (Q_{zz}),

$$\text{mit } z = r \cos \theta : \quad \Phi_2(\vec{r}) = \frac{3}{16\pi\epsilon_0 r^3} Q_{zz} (3 \cos^2 \theta - 1) .$$



Kugelkoordinaten

$$x = r \sin \theta \cos \phi, \quad y = r \sin \theta \sin \phi, \quad z = r \cos \theta$$

Orthogonale Einheitsvektoren:

$$\hat{e}_r = \frac{\vec{r}}{r} = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix},$$

$$\hat{e}_\phi = \frac{1}{r \sin \theta} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{e}_\theta = \hat{e}_\phi \times \hat{e}_r = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \phi \\ \cos \theta \sin \phi \\ -\sin \theta \end{pmatrix}.$$

Gradient: $f(\vec{r}) = f(r, \theta, \phi) \Rightarrow \vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \hat{e}_\phi.$

Divergenz: $\vec{A} = A_r(r, \theta, \phi) \hat{e}_r + A_\theta(r, \theta, \phi) \hat{e}_\theta + A_\phi(r, \theta, \phi) \hat{e}_\phi \Rightarrow$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\theta) + \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \right].$$

Der Laplace-Operator lässt sich nun leicht über $\Delta f = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} f$ in Kugelkoordinaten umrechnen:

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} .$$

Sphärische Tensoren

Zerlegung des Laplace-Operators in Radial- und Winkelanteil:

$$\Delta f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) - \frac{1}{r^2} \mathcal{L}^2 f(r, \theta, \phi) , \quad \mathcal{L}^2 = -\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} .$$

\mathcal{L}^2 ist eine lineare Abbildung im Raum aller Funktionen der Winkel θ und ϕ ($0 \leq \phi < 2\pi$, $0 \leq \theta < \pi$).

Wir suchen nach *Eigenfunktionen* Y_λ dieser Abbildung, $\mathcal{L}^2 Y_\lambda = \lambda Y_\lambda$.

$$Y = \text{const} \Rightarrow \mathcal{L}^2 Y = 0; \quad Y = \frac{z}{r} = \cos \theta \text{ oder } Y = \frac{x \pm iy}{r} = \sin \theta e^{\pm i\phi} \Rightarrow \mathcal{L}^2 Y = 2Y;$$

$$Y = 3 \frac{z^2}{r^2} - 1 = 3 \cos^2 \theta - 1 \quad \text{oder} \quad Y = \frac{(x \pm iy)z}{r^2} = \sin \theta \cos \theta e^{\pm i\phi}$$

$$\text{oder} \quad Y = \frac{x^2 - y^2 \pm 2ixy}{r^2} = \sin^2 \theta e^{\pm 2i\phi} \implies \mathcal{L}^2 Y = 6Y .$$

Allgemein: $\mathcal{L}^2 Y_{lm}(\theta, \phi) = l(l+1)Y_{lm}(\theta, \phi)$, $l = 0, 1, 2, \dots$, $m = -l, \dots, l-1, l$.

$Y_{lm}(\theta, \phi)$ sind die *Kugelflächenfunktionen* (s. S. 68).

$r^l Y_{lm}(\theta, \phi)$ sind *harmonische Funktionen*: $\Delta (r^l Y_{lm}(\theta, \phi)) = 0$.

Eigenfunktionen eines Differentialoperators wie \mathcal{L}^2 eignen sich als *Basis des Vektorraums* aller Funktionen der Winkel θ und ϕ .

Jede Funktion von θ und ϕ lässt sich nach den Y_{lm} entwickeln:

$$Y(\theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l c_{lm} Y_{lm}(\theta, \phi) .$$

Die Koeffizienten ergeben sich aus der *Orthogonalitätsrelation*:

$$\int Y_{lm}^*(\theta, \phi) Y_{l'm'}(\theta, \phi) d\Omega \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta Y_{lm}^*(\theta, \phi) Y_{l'm'}(\theta, \phi) = \delta_{l,l'} \delta_{m,m'} ,$$

$$c_{lm} = \int Y_{lm}^*(\theta, \phi) Y(\theta, \phi) d\Omega .$$

Die Tensor-Eigenschaften einer mehrkomponentigen Funktion $F^{(i)}$ sind durch das Transformationsverhalten der Komponenten bei Drehungen im Raum gegeben. Für eine Funktion des Ortsvektors \vec{r} wirken die Drehungen nur auf die Orientierung — d.h. auf die Winkel — von \vec{r} , nicht auf seine Länge, r . Eine Entwicklung nach

Kugelflächenfunktionen, $F^{(i)}(\vec{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l F_{lm}^{(i)}(r) Y_{lm}(\theta, \phi)$, hilft,

die Radialanteile $F_{lm}^{(i)}(r)$ von den Winkelanteilen zu trennen.

Die $2l + 1$ Kugelflächenfunktionen $Y_{lm}(\theta, \phi)$ zu gegebenem Index l sind Eigenfunktionen des Winkelanteils \mathcal{L}^2 des Laplace-Operators zum Eigenwert $l(l + 1)$. Diese Eigenschaft bleibt bei Drehung \mathcal{O} des Koordinatensystems erhalten. Die Winkel θ' , ϕ' sind im gedrehten Koordinatensystem anders definiert, und es gibt eine wohldefinierte

Transformation der Kugelflächenfktn: $Y_{lm'}(\theta', \phi') = \sum_{m=-l}^l D_{m',m}^l(\mathcal{O}) Y_{lm}(\theta, \phi)$.

Ein $(2l + 1)$ -tupel von Größen F_m ($m = -l, -l + 1, \dots, l - 1, l$), dessen Komponenten bei einer Drehung \mathcal{O} des Koordinatensystems dasselbe Transformationsverhalten haben wie die Kugelflächenfktn,

$$F_m \rightarrow F'_{m'} = \sum_{m=-l}^l D_{m',m}^l(\mathcal{O}) F_m ,$$

bilden einen *sphärischen Tensor* l -ter Stufe. Zwei wichtige Unterschiede zum kartesischen Tensor N -ter Stufe, $T_{i_1 i_2 \dots i_N}$ sind:

1. Alle $2l + 1$ Komponenten eines sphärischen Tensors l -ter Stufe werden durch einen weiteren Index m erfasst.
2. *Irreduzibilität*: Es gibt keine Linearkombinationen der Komponenten eines sphärischen Tensors l -ter Stufe, die sich unter allen Drehungen wie die Komponenten eines Tensors niedriger Stufe verhalten — im Gegensatz z.B. zum kartesischen Tensor zweiter Stufe, dessen Spur ein skalar ist.

Wenn wir die räumlich begrenzte Ladungsverteilung $\rho(\vec{r}')$ nach Kugelflächenfunktionen entwickeln,

$$\rho(\vec{r}') = \sum_{l', m'} \rho_{l' m'}(r') Y_{l' m'}(\theta', \phi'), \quad \rho_{l' m'}(r') = \int Y_{l' m'}^*(\theta', \phi') \rho(\vec{r}') d\Omega',$$

dann ist mit Hilfe der *Zauberformel*,

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}(\theta, \phi) Y_{lm}^*(\theta', \phi'), \quad (r_{<} = \min\{r, r'\}, \quad r_{>} = \max\{r, r'\})$$

das elektrostatische Potenzial $\Phi(\vec{r})$ für $r > d$

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{r^{l+1}} \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \sum_{m=-l}^l Q_{lm}^* Y_{lm}(\theta, \phi)$$

mit den sphärischen Multipolmomenten der Ladungsverteilung:

$$Q_{lm}^* = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \int_0^{\infty} r'^2 dr' r'^l \rho_{lm}(r') \Rightarrow Q_{lm} = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \int r'^l Y_{lm}(\theta', \phi') \rho(\vec{r}') d^3 r'.$$

Für $l = 0$: $Q_{00} = \int \rho(\vec{r}') d^3 r' = Q$; das sphärische Monopolmoment ist gerade die Gesamtladung Q .

Für $l = 1$: $Q_{10} = \int z' \rho(\vec{r}') d^3 r' = p_z$,

$$Q_{1\pm 1} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} \int (x' \pm iy') \rho(\vec{r}') d^3 r' = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} (p_x \pm ip_y) .$$

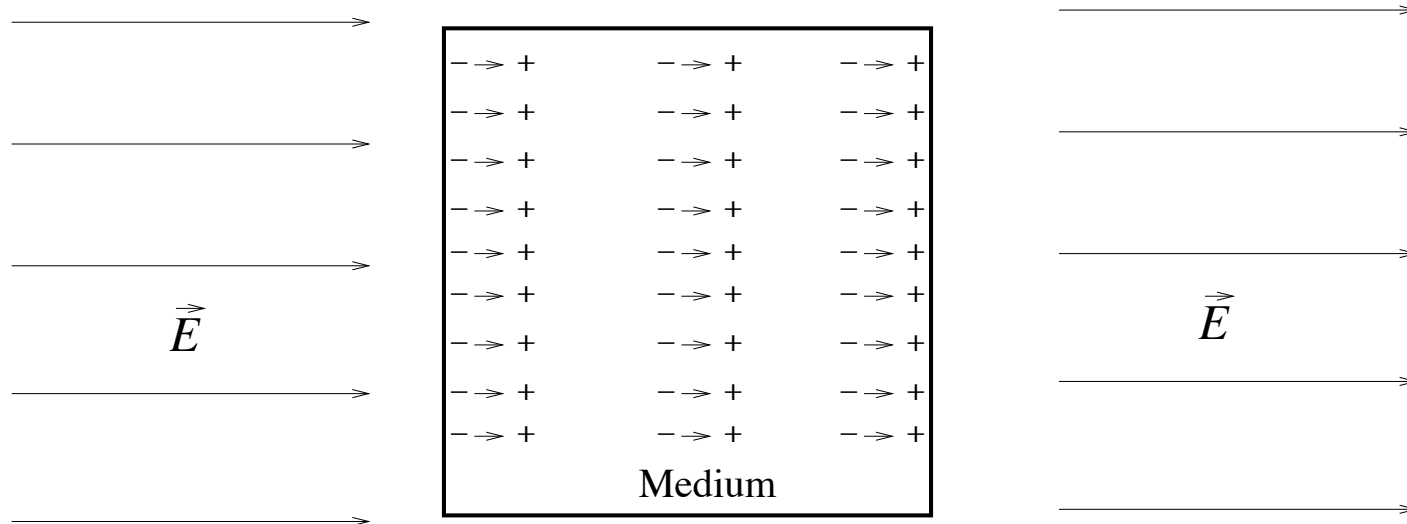
Die drei Komponenten des sphärischen Dipolmoments sind, bis auf Linearkombinationen, die drei Komponenten des Dipolvektors \vec{p} der Ladungsverteilung.

Für $l = 2$ sind die $Q_{l=2,m}$ die fünf Komponenten des sphärischen Quadrupoltensors. Das entspricht den fünf Komponenten einer spurlosen symmetrischen 3×3 Matrix, die den Quadrupol-Tensor kartesisch darstellt.

Die $m = 0$ Komponente ist: $Q_{20} = \frac{1}{2} \int (3z'^2 - r'^2) \rho(\vec{r}') d^3 r' = \frac{3}{2} Q_{zz}$.

Dielektrisches Medium

Ein (nichtleitendes) *dielektrisches Medium* enthält auf mikroskopischer Skala viele negative und positive Ladungen, die unter dem Einfluss eines elektrischen Feldes etwas verschoben werden, das Medium wird *polarisiert*. Dadurch entsteht im Medium eine induzierte Dipoldichte $\vec{P} = n\vec{p}$ (n = Dichte der Dipole, \vec{p} = mittleres Dipolmoment eines davon), und an der Oberfläche entsteht eine induzierte Flächenladungsdichte σ_P .



Das elektrostatische Potenzial $\Phi_P(\vec{r})$, das von den induzierten Ladungen und Dipolen ausgeht, ist (vgl. S. 11):

$$\begin{aligned}\Phi_P(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\text{Vol}(\text{Medium})} \frac{(\vec{r} - \vec{r}') \cdot \vec{P}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3r' \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_{\text{Ofl.}(\text{Medium})} \frac{\vec{P}(\vec{r}') \cdot d\vec{\omega}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\text{Vol}(\text{Medium})} \frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{P}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r' .\end{aligned}$$

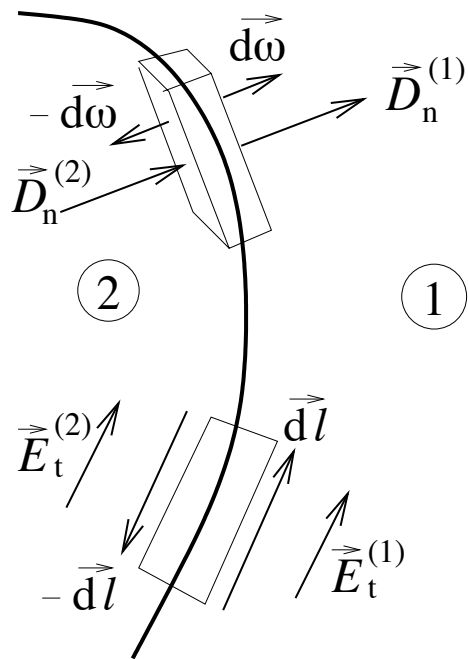
Φ_P ist also das Potenzial, das von einer Flächenladung $\sigma_P = \vec{P} \cdot \hat{e}_n$ auf der Oberfläche des Mediums (\hat{e}_n ist Einheitsvektor normal zur Oberfläche) und einer *Polarisationsladungsdichte* $\rho_P = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}$ im Medium hervorgerufen wird.

Für kleine Stärken des elektrischen Feldes \vec{E} gehen wir von einer linearen Abhängigkeit der Polarisation aus: $\vec{P} = \chi\epsilon_0\vec{E} = (\epsilon-1)\epsilon_0\vec{E}$; χ ist die *dielektrische Suszeptibilität*, $\epsilon = 1 + \chi$ ist die *relative Dielektrizitätskonstante* des Mediums. χ und ϵ sind allgemein zweistufige Tensoren; nur im isotropen Medium sind es Skalare.

Elektrostatische Grundgleichungen im Dielektrikum

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho_{\text{frei}} + \rho_{\text{P}}}{\epsilon_0} = \frac{\rho_{\text{frei}} - \vec{\nabla} \cdot \vec{P}}{\epsilon_0} \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \rho_{\text{frei}}$$

Die *elektrische Verschiebung* $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E}$ erfasst im Mittel die mikroskopischen Effekte der Ladungsverschiebungen und erfüllt die Gleichung $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_{\text{frei}}$.



An Grenzfläche ohne freie Oberflächenladungen:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0 \Rightarrow \oint_{\text{Off(Kasten)}} \vec{D} \cdot d\vec{\sigma} = 0$$

$$\text{Dicke(Kasten)} \rightarrow 0 \Rightarrow (\vec{D}_n^{(1)} - \vec{D}_n^{(2)}) \cdot d\vec{\omega} = 0$$

$$\text{Also: } D_n^{(1)} = D_n^{(2)}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \Rightarrow \oint_{\text{Rd(Rechteck)}} \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0$$

$$\text{Breite(Rechteck)} \rightarrow 0 \Rightarrow (\vec{E}_t^{(1)} - \vec{E}_t^{(2)}) \cdot d\vec{l} = 0$$

$$\text{Also: } E_t^{(1)} = E_t^{(2)}$$

2. MAGNETOSTATIK

Grunderfahrung: Auf eine bewegte elektrische Ladung q wirkt, auch ohne elektrisches Feld, eine Kraft: $\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B}$.

$\vec{B}(\vec{r})$ ist das *Magnetfeld*, oft *magnetische Induktion* genannt.

Einheit: 1 Volt Sekunde/ Meter² \equiv 1 Tesla.

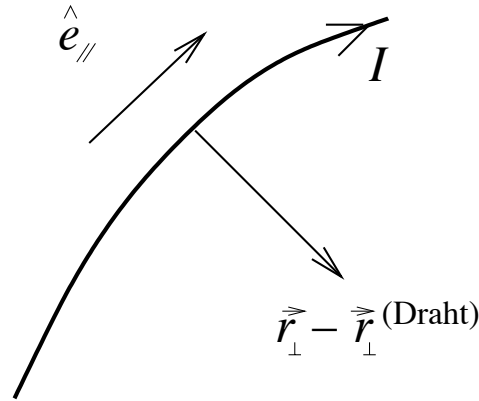
Die *Stromdichte* \vec{j} setzt sich aus der Dichte ρ_+ der positiven Ladungen, die sich lokal mit Geschwindigkeit \vec{v}_+ bewegen, und der Dichte ρ_- der negativen Ladungen ($\rho_- \leq 0$) zusammen, die sich lokal mit Geschwindigkeit \vec{v}_- bewegen: $\vec{j} = \rho_+ \vec{v}_+ + \rho_- \vec{v}_-$.

Kontinuitätsgleichung: $\vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$, $\rho = \rho_+ + \rho_-$.

Im stationären Fall ist also $\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$. Der Gesamtstrom

$I = \int_{\text{Querschnitt}} \vec{j} \cdot d\vec{\omega}$, der einen (nichtidealen) Leiter durchfließt, ist im stationären Fall konstant.

Kraftdichte auf Stromdichte im Magnetfeld: $\vec{k}(\vec{r}) = \vec{j}(\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{r})$.



Im idealisierten dünnen Draht ist die Stromdichte: $\vec{j}(\vec{r}) = I \hat{e}_{\parallel} \delta(\vec{r}_{\perp} - \vec{r}_{\perp}^{(\text{Draht})})$.

Kraft auf ein Drahtelement: $d\vec{F} = I d\vec{r} \times \vec{B}$.

Kraft auf Drahtschleife in einem homogenen Magnetfeld: $\vec{F} = \oint d\vec{F} = I (\oint d\vec{r}) \times \vec{B} = 0$.

Drehmoment auf Drahtschleife in einem homogenen Magnetfeld:

$$\vec{M} = I \oint \vec{r} \times (d\vec{r} \times \vec{B}) = I \vec{S} \times \vec{B}, \quad \vec{S} = \frac{1}{2} \oint \vec{r} \times d\vec{r}.$$

Das Produkt aus Stromstärke I und orientierter Oberfläche \vec{S} ist das magnetische Dipolmoment der Stromschleife: $\vec{\mu} = I \vec{S}$.

Nach dem *Ampereschen Durchflutungsgesetz* sind Ströme auch

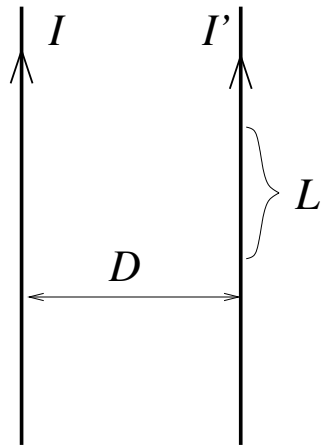
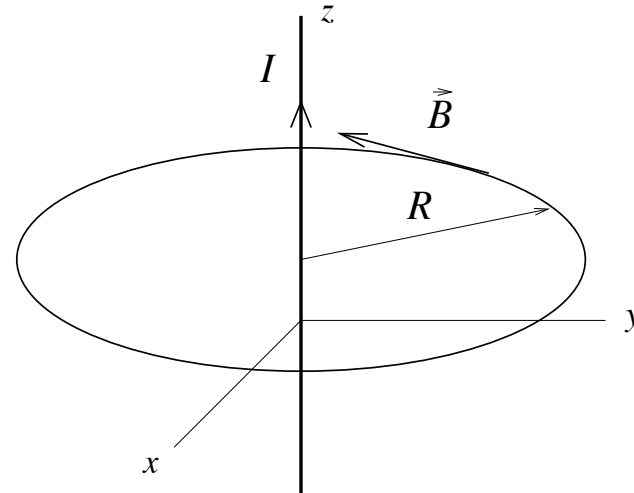
Quellen des Magnetfeldes: $\int_{\text{Fläche}} \vec{j} \cdot d\vec{\omega} = \frac{1}{\mu_0} \oint_{\text{Rd(Fläche)}} \vec{B} \cdot d\vec{r}$.

Satz von Stokes $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ (keine magnetischen Monopole $\rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$).

Magnetfeld eines stromdurchflossenen dünnen Drahts:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \left(\hat{e}_z \times \frac{\vec{r}}{r} \right), \quad R = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

(μ_0 = "Permeabilität des Vakuums")



Kraft zwischen zwei parallelen Drähten:

Magnetfeld durch I im Abstand D : $|\vec{B}| = \frac{\mu_0 I}{2\pi D}.$

Kraft auf Länge L im 2. Draht: $|F| = |\vec{B}|I'L = \frac{\mu_0 II'}{2\pi D}L.$

Definition der SI-Einheiten (S. 3, Ampere \rightarrow Coulomb, Volt):

$$I = I' = 1 \text{ A}, \quad D = 1 \text{ m} \Rightarrow \frac{|\vec{F}|}{L} = 2 \times 10^{-7} \frac{\text{N}}{\text{m}}; \quad \text{also: } \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}.$$

Vektorpotenzial

$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \implies$ es gibt ein Vektorfeld \vec{A} mit $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$.

Eine *Eichtransformation*, $\vec{A} \rightarrow \vec{A} + \vec{\nabla} f$, ändert \vec{B} nicht. In *Coulomb-Eichung*, $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$, ist $\vec{\nabla} \times \vec{B} = -\Delta \vec{A}$ und die Gleichung

$-\Delta \vec{A} = \mu_0 \vec{j}$ hat die explizite Lösung:
$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r'.$$

Für $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ folgt (“Biot-Savart-Gesetz”):

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3 r'.$$

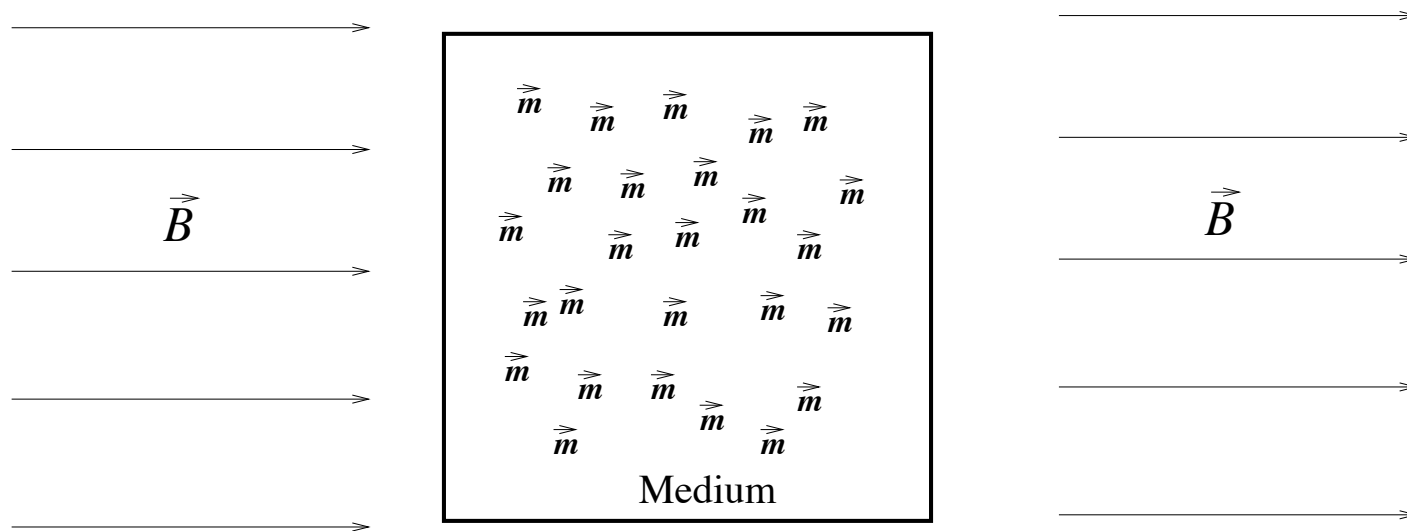
Felder eines magnetischen Dipols $\vec{\mu}$ am Koordinatenursprung

$$\vec{A}_{\text{Dip}}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{\mu} \times \vec{r}}{r^3}, \quad \vec{B}_{\text{Dip}}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{A}_{\text{Dip}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(3 \frac{(\vec{\mu} \cdot \vec{r}) \vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{\mu}}{r^3} \right).$$

(vgl. S. 11 für elektrisches Dipolfeld)

2. Magnetostatik im Medium

In einem *magnetisierbaren Medium* entsteht unter dem Einfluss eines magnetischen Feldes eine Magnetisierung $\vec{M} = n\vec{m}$; n ist die Dichte magnetischer Dipole, \vec{m} ihr mittleres magnetisches Dipolmoment.



Das Vektorpotenzial $\vec{A}_m(\vec{r})$ der Dipoldichte \vec{M} ist (vgl. S. 28),

$$\vec{A}_m(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{M}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3r' = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{\nabla}_{\vec{r}'} \times \vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r' .$$

Der Beitrag der Magnetisierung zum Vektorpotenzial entspricht einer *Magnetisierungsstromdichte*: $\vec{j}_m = \vec{\nabla} \times \vec{M}$. Das zugehörige Magnetfeld \vec{B}_m erfüllt $\vec{\nabla} \times \vec{B}_m = \mu_0 \vec{j}_m = \mu_0 \vec{\nabla} \times \vec{M} \Rightarrow \vec{B}_m = \mu_0 \vec{M}$. Das Feld, das nur die *freien Ströme* $\vec{j}_{\text{frei}} = \vec{j} - \vec{j}_m$ als Quelle hat, ist $\vec{B} - \mu_0 \vec{M}$. Als Magnetfeld im Medium definiert man,

$$\vec{H} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M}, \quad \vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}).$$

Amperesches Durchflutungsgesetz im Medium: $\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j}_{\text{frei}}$.

Für kleine Stärken der magnetischen Induktion \vec{B} bzw. des Magnetfeldes \vec{H} gehen wir von einer linearen Abhängigkeit aus:

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H} \Rightarrow \vec{B} = \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H} = \mu \mu_0 \vec{H}, \quad \mu = 1 + \chi_m.$$

χ_m ist die *magnetische Suszeptibilität* des Mediums,

$\mu = 1 + \chi_m$ ist die *relative Permeabilität*. χ_m und μ sind nur im isotropen Medium Skalare, sonst zweistufige Tensoren.

Paramagnetismus: $\chi_m > 0$, $\mu > 1$; Diamagnetismus: $\chi_m < 0$, $\mu < 1$.

Der Fall des Ferromagnetismus entspricht $\chi_m, \mu \gg 1$.

Elektrostatik

Felder: elektrisches \vec{E} , Polarisation \vec{P} ,
elektrische Verschiebung \vec{D}

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E}$$

Potenziale: $\vec{E} = -\vec{\nabla} \Phi$

Quellen:

$$\rho(\vec{r})$$

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho_{\text{ges}}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} d^3r'$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho_{\text{ges}}(\vec{r}')(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} d^3r'$$

Maxwell-

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_{\text{frei}}$$

gleichungen:

nur für

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$$

Elektrostatik \rightarrow Magnetostatik (im Vakuum):

Magnetostatik

Induktion \vec{B} , Magnetisierung \vec{M} ,
Magnetfeld \vec{H}

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M} = \frac{1}{\mu\mu_0} \vec{B}$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

$$\vec{j}(\vec{r})$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}_{\text{ges}}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} d^3r'$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}_{\text{ges}}(\vec{r}') \times (\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} d^3r'$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

zeitunabhängige Felder :

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j}_{\text{frei}}$$

$$\vec{E} \rightarrow \vec{B}, \epsilon_0 \rightarrow \frac{1}{\mu_0}, \rho \rightarrow \vec{j}, \cdot \rightarrow \times$$

Ohmsches “Gesetz”: In einem nicht-idealen Leiter besitzen elektrische Ladungen eine begrenzte Mobilität. Unter dem Einfluss eines zeitlich konstanten elektrischen Feldes $\vec{E}(\vec{r})$ stellt sich eine Stromdichte $\vec{j}(\vec{r})$ ein. Für einen *Ohmschen Leiter* hängt \vec{j} linear von \vec{E} ab: $\vec{j} = \sigma \vec{E}$. σ ist die *Leitfähigkeit*; sie ist nur im isotropen Medium ein Skalar, sonst ein zweistufiger Tensor.

Ein Draht mit konstantem Querschnitt S liege parallel zur z -Achse; im Draht fließt unter dem Einfluss eines homogenen elektrischen Feldes $\vec{E} = E \hat{e}_z$ die Stromdichte $\vec{j} = \sigma \vec{E}$, $I = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{\omega} = \sigma_{zz} S E$. Über eine Strecke des Drahts zwischen z_0 und $z_0 + L$ ist die Potenzialdifferenz, die sog. *elektrische Spannung* U ,

$$U = \int_{z_0}^{z_0+L} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \Phi(z_0) - \Phi(z_0+L) = EL \Rightarrow I = \frac{\sigma_{zz} S}{L} U, \quad U = IR.$$

Dabei ist $R = L/(\sigma_{zz} S)$ der elektrische Widerstand für dieses Stück Draht. N.B. Das “Ohmsche Gesetz” $U = IR$ gilt nur unter der Annahme des linearen Zusammenhangs: $\vec{j} = \sigma \vec{E}$.

3. ZEITABHÄNGIGE FELDER

Eine zeitliche Veränderung des Magnetfeldes induziert eine elektrische Spannung. In einer (nicht-idealen) Leiterschleife, welche die orientierte Oberfläche \vec{S} umschließt, fließt dadurch ein Strom proportional zur Zeitableitung des magnetischen Flusses Φ_{mag} ,

$$\Phi_{\text{mag}} = \int_{\vec{S}} \vec{B} \cdot d\vec{\omega}, \quad |I_{\text{ind}}| = \frac{1}{R} \frac{d\Phi_{\text{mag}}}{dt}, \quad U_{\text{ind}} = I_{\text{ind}} R = -\frac{d}{dt} \int_{\vec{S}} \vec{B} \cdot d\vec{\omega} = -\int_{\vec{S}} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{\omega}.$$

Im Gegensatz zum statischen Fall ist die elektrische Spannung über die geschlossene Kurve, $U_{\text{ind}} = \oint_{\text{Rd}(\vec{S})} \vec{E} \cdot d\vec{r}$, nicht Null, und aus

$$U_{\text{ind}} = \oint_{\text{Rd}(\vec{S})} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_{\vec{S}} (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot d\vec{\omega} = -\int_{\vec{S}} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{\omega} \quad \text{folgt} \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

Lenzsche Regel: Magnetfeld des von der induzierten Spannung verursachten Stroms wirkt der Änderung des magnetischen Flusses entgegen.

N.B.: $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial \vec{B} / \partial t$ gilt unabhängig vom Ohmschen Gesetz.

Maxwellsche Ergänzung des Ampereschen Durchflutungsgesetzes:

Die Kontinuitätsgleichung $\vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \partial\rho/\partial t = 0$ besagt, dass $\vec{\nabla} \cdot \vec{j}$ im stationären Fall Null sein muss, aber im zeitabhängigen Fall kann $\vec{\nabla} \cdot \vec{j}$ von Null verschieden sein. Da $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \dots)$ immer Null ist, muss das Amperesche Durchflutungsgesetz (S. 26, 31) durch den *Verschiebungsstrom* \vec{j}_V ergänzt werden, z.B. im Medium:

$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j}_{\text{frei}} + \vec{j}_V$. Aus $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{H}) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{j}_{\text{frei}} + \vec{j}_V) = 0$ folgt

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j}_V = -\vec{\nabla} \cdot \vec{j}_{\text{frei}} = \frac{\partial \rho_{\text{frei}}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \Rightarrow \vec{j}_V = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}.$$

Maxwellgleichungen für zeitabhängige Felder:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{D} &= \rho_{\text{frei}} & \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 & \vec{\nabla} \times \vec{H} &= \vec{j}_{\text{frei}} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{aligned}$$

$$\text{Dabei ist: } \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E}, \quad \vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M} = \frac{1}{\mu \mu_0} \vec{B}.$$

Wellengleichung

Im Vakuum, $\rho = 0$, $\vec{j} = 0$: $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$, $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$.

Entkopplung der Gleichungen für \vec{E} und \vec{B} :

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \Delta \vec{E} = -\Delta \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla} \times \vec{B}) = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2},$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \Delta \vec{B} = -\Delta \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla} \times \vec{E}) = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}.$$

Die Komponenten von \vec{E} , \vec{B} lösen die homogene *Wellengleichung*

$$\left(\Delta - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial}{\partial t^2} \right) f(\vec{r}, t) = 0, \quad c_0 = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}. \quad (\text{HWG})$$

Jede Funktion der Form $f(\vec{r}, t) = f(\vec{k} \cdot \vec{r} - |\vec{k}|c_0 t)$ erfüllt die Wellengleichung (HWG). Da die Funktionswerte von $\vec{k} \cdot \vec{r}$ abhängen, sind sie zu einem gegebenen Ortsvektor \vec{r}_0 in der ganzen Ebene, die durch \vec{r}_0 geht und senkrecht zu \vec{k} ist, gleich. Der Funktionswert $f(\vec{r}_0, t_0)$ wandert bis zur Zeit $t > t_0$ zur Ebene durch \vec{r} weiter,

$$\vec{k} \cdot \vec{r} - |\vec{k}|c_0 t = \vec{k} \cdot \vec{r}_0 - |\vec{k}|c_0 t_0, \quad \text{d.h.} \quad (\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \vec{k} = c_0 |\vec{k}|(t - t_0).$$

Die Ebenen gleicher Funktionswerte wandern also mit Geschwindigkeit c_0 , der *Lichtgeschwindigkeit* $c_0 = 299792458$ m/s , in Richtung des *Wellenvektors* \vec{k} . (Mit μ_0 von S. 27 folgt $\epsilon_0 = 1/(\mu_0 c_0^2)$, s. S. 4.)

Beispiel einer ebenen Welle: $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$.

Zu gegebener Zeit ist die Welle in Richtung von \vec{k} periodisch;

die Periode im Ortsraum ist die *Wellenlänge* $\lambda = \frac{2\pi}{|\vec{k}|}$.

An einem gegebenen Ort ist die Welle periodisch in der Zeit mit

der Periode $T = \frac{2\pi}{\omega}$, was einer Frequenz $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$ entspricht .

Die *Kreisfrequenz* ω und der Betrag des Wellenvektors \vec{k} sind über die *Dispersionsrelation* verknüpft: $\omega = c_0 |\vec{k}|$.

Komplexe Schreibweise: $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \exp \left[i \left(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t \right) \right]$;

physikalische Bedeutung hat nur der Realteil.

Polarisation: Für ebene Welle $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \exp \left[i \left(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t \right) \right]$

gibt es zu gegebenem Wellenvektor \vec{k} noch verschiedene Möglichkeiten für die *Polarisation* von \vec{E} .

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = i \vec{k} \cdot \vec{E}_0 \exp [\dots] = 0 \Rightarrow \vec{k} \cdot \vec{E}_0 = 0. \quad \text{OBdA: } \vec{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ k \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{E}_0 = \begin{pmatrix} E_{0x} \\ E_{0y} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Fall 1: $\begin{pmatrix} E_{0x} \\ E_{0y} \end{pmatrix} = e^{i\alpha} \begin{pmatrix} \eta_x \\ \eta_y \end{pmatrix}, \quad \eta_x, \eta_y \text{ reell.}$

$$E_x = \eta_x \cos \left[\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega (t - \alpha/\omega) \right], \quad E_y = \eta_y \cos \left[\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega (t - \alpha/\omega) \right],$$

\vec{E} schwingt mit $\frac{E_y(t)}{E_x(t)} = \frac{\eta_y}{\eta_x} = \text{const.}$ in der x - y -Ebene: *lineare Polarisation*.

Fall 2: $\begin{pmatrix} E_{0x} \\ E_{0y} \end{pmatrix} = e^{i\alpha} \begin{pmatrix} \eta \\ \pm i\eta \end{pmatrix}, \quad \eta \text{ reell.}$

$$E_x = \eta \cos \left[\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega (t - \alpha/\omega) \right], \quad E_y = \mp \eta \sin \left[\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega (t - \alpha/\omega) \right],$$

elektrischer Feldvektor kreist im positiven (negativen) Sinn in der x - y -Ebene; bezogen auf die Ausbreitungsrichtung ($+z$ -Achse) ist die Welle *rechts-* bzw. *links-zirkular* polarisiert.

Im allgemeinen Fall ist E_{0y}/E_{0x} weder reell noch gleich $\pm i$; dann bewegt sich der Feldvektor $\vec{E}(t)$ auf einer Ellipse in der x - y -Ebene; man spricht von *elliptisch polarisiertem* Licht. Dies ist der allgemeinste Fall für eine (kohärente) monochromatische Ebene Welle mit einem gegebenen Wellenvektor \vec{k} .

Zusammenhang zwischen \vec{E} -Feld und \vec{B} -Feld:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \exp \left[i \left(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t \right) \right], \quad \vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}_0 \exp \left[i \left(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t \right) \right].$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = i(\vec{k} \times \vec{B}_0) \exp [\dots] = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -i\omega \mu_0 \epsilon_0 \vec{E}_0 \exp [\dots] \Rightarrow \vec{k} \times \vec{B}_0 = -\frac{\omega}{c_0^2} \vec{E}_0.$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = i(\vec{k} \times \vec{E}_0) \exp [\dots] = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = i\omega \vec{B}_0 \exp [\dots] \Rightarrow \vec{k} \times \vec{E}_0 = \omega \vec{B}_0.$$

$$\vec{E}_0, \vec{B}_0 \text{ reell} \Rightarrow \vec{E}_0, \vec{B}_0, \vec{k} \text{ pw orthogonal; } |\vec{E}_0| = c_0 |\vec{B}_0|, \vec{E}_0 \times \vec{B}_0 = |\vec{E}_0| |\vec{B}_0| \frac{\vec{k}}{k}.$$

Im homogenen isotropen Medium erfüllen die Felder die Wellengleichung

(HWG) mit der Lichtgeschwindigkeit im Medium: $c = \frac{1}{\sqrt{\mu \mu_0 \epsilon \epsilon_0}} = \frac{c_0}{\sqrt{\mu \epsilon}}.$

Energie und Impuls des elektromagnetischen Feldes

Definition des *Poynting-Vektors*: $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$. Für eine ebene Welle

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t), \quad \vec{H} = \vec{H}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t), \quad \vec{E}_0, \vec{H}_0 \text{ reell, ist}$$

$$\vec{S} = \vec{S}_0 \cos^2(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \quad \text{mit} \quad \vec{S}_0 = |\vec{E}_0| |\vec{H}_0| \hat{e}_{\vec{k}} = c |\vec{B}_0| |\vec{H}_0| \hat{e}_{\vec{k}} = c |\vec{E}_0| |\vec{D}_0| \hat{e}_{\vec{k}}.$$

$$\text{Maxwellgln} \implies \vec{\nabla} \cdot \vec{S} + \vec{j} \cdot \vec{E} + \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0. \quad (\vec{j} \equiv \vec{j}_{\text{frei}}, \rho \equiv \rho_{\text{frei}})$$

$$\vec{j} \cdot \vec{E} \equiv (\rho \vec{E}) \cdot \vec{v} = (\rho \vec{E}) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} \equiv \frac{\text{Kraftdichte} \times \text{Weg}}{\text{Zeit}} = \frac{\text{Arbeit/Volumen}}{\text{Zeit}}.$$

$\vec{j} \cdot \vec{E}$ beschreibt die mechanische Arbeit, welche das elektrische Feld an den strömenden Ladungen leistet: "Joulesche Wärme". Wir

interpretieren $\vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ als Änderung der Energiedichte des

elektromagnetischen Feldes. \vec{S} ist die Strömungsdichte der Energie (Joulesche Wärme+Feldenergie) und die Kontinuitätsgleichung

$$\text{ist:} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{S} + \frac{\partial w_J}{\partial t} + \frac{\partial w_{\text{em}}}{\partial t} = 0.$$

Differential der Feldenergiedichte: $\delta w_{\text{em}} = \vec{E} \cdot \delta \vec{D} + \vec{H} \cdot \delta \vec{B}$.

NUR im isotropen homogenen Medium mit konstantem μ, ϵ können wir schreiben: $w_{\text{em}} = \frac{1}{2} (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B})$.

Impulsdichte des elektromagnetischen Feldes:

$$\vec{D} \times \vec{B} = \epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0 (\vec{E} \times \vec{H}) = \frac{1}{c^2} \vec{S} = \frac{w_{\text{em}} c \hat{e}_{\vec{S}}}{c^2} = \frac{w_{\text{em}}}{c} \hat{e}_{\vec{S}}.$$

Mechanische Kraftdichte: $\vec{f} = \rho \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B}$ = zeitliche Änderung der mechanischen Impulsdichte. Impulserhaltungsgleichung:

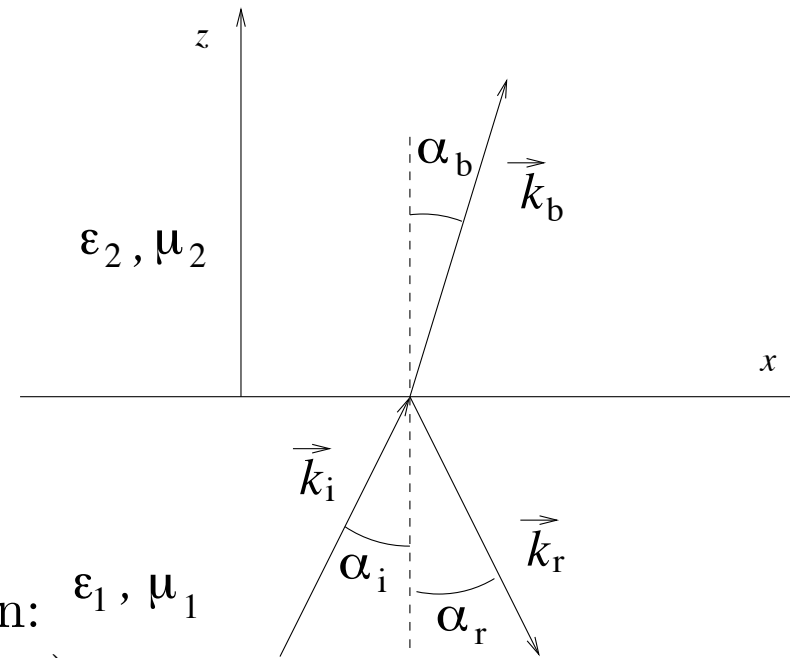
$$\rho \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B} + \frac{\partial}{\partial t} (\vec{D} \times \vec{B}) = \vec{\nabla} \cdot \mathbf{T} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \mathbf{T}_{ij}.$$

Dabei ist \mathbf{T} der *Maxwellsche Spannungstensor*:

$$T_{ij} = E_i D_j + H_i B_j - \frac{1}{2} \delta_{i,j} (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B}). \quad [\text{NUR im ... , s. oben}]$$

Reflexion und Brechung

Die x - y -Ebene möge die Grenzfläche zweier Medien mit den Parametern ϵ_1, μ_1 ($z < 0$) und ϵ_2, μ_2 ($z > 0$) sein, auf der keine freien Ladungen, Ströme sind. Eine ebene Lichtwelle $\vec{E}_{\text{in}}(\vec{r}, t) = \vec{E}_i e^{i(\vec{k}_i \cdot \vec{r} - \omega t)}$ trifft von Medium 1 auf die Grenzfläche, wodurch eine reflektierte Welle in Medium 1 und eine gebrochene Welle in Medium 2 entstehen:

$$\vec{E}_{\text{refl}}(\vec{r}, t) = \vec{E}_r e^{i(\vec{k}_r \cdot \vec{r} - \omega t)}, \quad \vec{E}_{\text{gebr}}(\vec{r}, t) = \vec{E}_b e^{i(\vec{k}_b \cdot \vec{r} - \omega t)}.$$


Aus der Stetigkeit der Tangentialkomponente des \vec{E} -Feldes an der Grenzfläche folgt: Frequenzen in reflektierter und gebrochener Welle = Frequenz der einfallenden Welle (ω), für alle \vec{r} in x - y -Ebene gilt $\vec{k}_i \cdot \vec{r} = \vec{k}_r \cdot \vec{r} = \vec{k}_b \cdot \vec{r}$, alle drei Wellenvektoren liegen in einer Ebene, der *Einfallsebene*, oBdA der x - z -Ebene. Dann gilt $(\vec{k}_i)_y = (\vec{k}_r)_y = (\vec{k}_b)_y = 0$ und $(\vec{k}_i)_x = (\vec{k}_r)_x = (\vec{k}_b)_x \stackrel{\text{def}}{=} k_x$.

Dispersionsrelation im Medium 1: $\omega = c_1 |\vec{k}_i| = c_1 |\vec{k}_r| \Rightarrow (\vec{k}_r)_z = -(\vec{k}_i)_z \Rightarrow \alpha_r = \alpha_i$.
 “Ausfallswinkel=Enfallswinkel.”

Vergleich der Dispersionsrelationen in beiden Medien:

$$\omega = c_1 |\vec{k}_i| = c_2 |\vec{k}_b| \Rightarrow \frac{c_1}{c_2} = \frac{|\vec{k}_b|}{|\vec{k}_i|} = \frac{\sqrt{k_x^2 + (\vec{k}_b)_z^2}}{k_x} \frac{k_x}{\sqrt{k_x^2 + (\vec{k}_i)_z^2}} = \frac{\sin \alpha_i}{\sin \alpha_b} = \frac{n_2}{n_1} .$$

“Snelliussches Brechungsgesetz”. n_i ist der *Brechungsindex* im Medium i : $n_i = c_0/c_i = \sqrt{\epsilon_i \mu_i}$.

Die Amplituden der reflektierten und gebrochenen Wellen hängen von der Polarisierung der einfallenden Welle ab. Das wird an zwei verschiedenen Beispielen linearer Polarisierung gezeigt.

Fall 1: \vec{E}_i liegt in der Einfallsebene, $E_{iy} \equiv (\vec{E}_i)_y = 0$. Wegen Stetigkeit der Tangentialkomponente von \vec{E} gilt $E_{by} = -E_{ry}$.

Mit $B_{bz} = \frac{k_x}{\omega} E_{by}$, $B_{rz} = \frac{k_x}{\omega} E_{ry}$, $B_{bz} = B_{rz}$ folgt $E_{by} = E_{ry} = 0$.

Also liegen auch \vec{E}_r und \vec{E}_b in der Einfallsebene.

Weitere Ausnutzung der Stetigkeiten:

$$\vec{E}_{\parallel} : E_{ix} + E_{rx} = E_{bx} ; \quad \vec{D}_{\perp} : \epsilon_1(E_{ix} + E_{rx}) = \epsilon_2 E_{bx} .$$

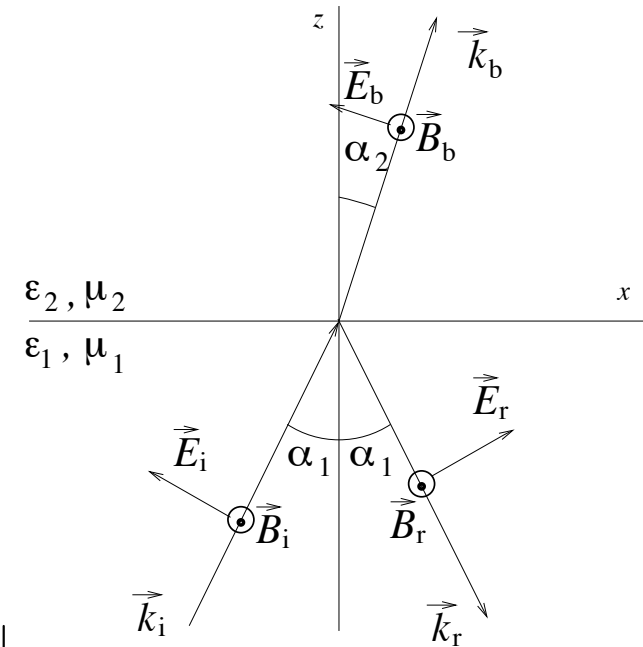
Mit $E_{ix} = -|\vec{E}_i| \cos \alpha_1$, $E_{rx} = +|\vec{E}_r| \cos \alpha_1$,

$$E_{bx} = -|\vec{E}_b| \cos \alpha_2 \Rightarrow |\vec{E}_b| = (|\vec{E}_i| - |\vec{E}_r|) \frac{\cos \alpha_1}{\cos \alpha_2} .$$

$$E_{iz} = |\vec{E}_i| \sin \alpha_1, \text{ etc. } \Rightarrow |\vec{E}_b| = \frac{\epsilon_1 (|\vec{E}_i| + |\vec{E}_r|) \sin \alpha_1}{\epsilon_2 \sin \alpha_2} .$$

$$\text{Aus } |\vec{E}_i| + |\vec{E}_r| = \frac{n_1 \epsilon_2}{n_2 \epsilon_1} |\vec{E}_b| \quad \text{und} \quad |\vec{E}_i| - |\vec{E}_r| = \frac{\cos \alpha_2}{\cos \alpha_1} |\vec{E}_b|$$

$$\text{folgt mit } F = \frac{\epsilon_1 n_2 \cos \alpha_2}{\epsilon_2 n_1 \cos \alpha_1} : \quad \frac{|\vec{E}_r|}{|\vec{E}_i|} = \frac{1 - F}{1 + F}, \quad \frac{|\vec{E}_b|}{|\vec{E}_i|} = \frac{2 \epsilon_1 n_2}{\epsilon_2 n_1 (1 + F)} .$$



Für Polarisation in der Einfallsebene verschwindet die reflektierte Welle, wenn

$$F = 1, \text{ d.h. wenn } \frac{\cos \alpha_2}{\cos \alpha_1} = \frac{n_1 \epsilon_2}{n_2 \epsilon_1} \approx \frac{n_2}{n_1} = \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2}, \text{ also für } \sin(2\alpha_1) = \sin(2\alpha_2).$$

Das passiert nicht nur für $\alpha_1 = \alpha_2$, sondern auch für den *Brewster-Winkel*, $\alpha_1 = \alpha_B$, für den $\alpha_1 + \alpha_2 = \frac{\pi}{2}$.

Fall 2: $\vec{E}_i \perp$ Einfallsebene ($\Rightarrow \vec{E}_r, \vec{E}_b$ auch).

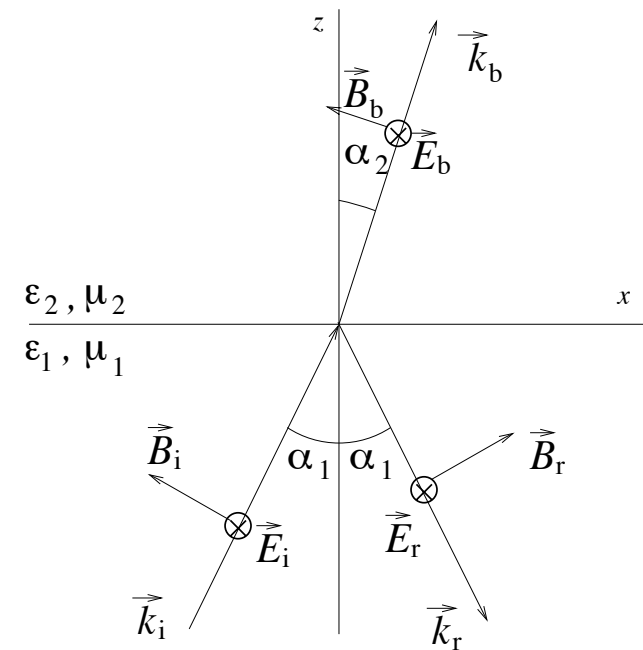
Stetigkeit von E_y : $E_{iy} + E_{ry} = E_{by}$.

Mit $B_{ix} = -|\vec{B}_i| \cos \alpha_1$, $B_{rx} = +|\vec{B}_r| \cos \alpha_1$, und $B_{bx} = -|\vec{B}_b| \cos \alpha_2$ folgt aus der Stetigkeit von \vec{H}_{\parallel} :

$$\frac{\cos \alpha_1}{\mu_1} (|\vec{B}_r| - |\vec{B}_i|) = -\frac{\cos \alpha_2}{\mu_2} |\vec{B}_b| \quad \text{und, weil}$$

$$|\vec{B}| = \frac{|\vec{E}|}{c} \quad \text{folgt} \quad \frac{\cos \alpha_1}{c_1 \mu_1} (|\vec{E}_i| - |\vec{E}_r|) = \frac{\cos \alpha_2}{c_2 \mu_2} |\vec{E}_b|.$$

$$\text{Mit } G = \frac{n_1 \mu_2 \cos \alpha_1}{n_2 \mu_1 \cos \alpha_2} \quad \text{erhalten wir:} \quad \frac{|\vec{E}_r|}{|\vec{E}_i|} = \frac{G - 1}{G + 1}, \quad \frac{|\vec{E}_b|}{|\vec{E}_i|} = \frac{2G}{G + 1}.$$



Frequenzabhängigkeit der Dielektrizitätskonstanten

Annahme: Polarisierbarkeit des Mediums rührt von der Auslenkung harmonisch gebundener Elektronen (Masse m_0 , Ladung $-e_0$) mit Reibungskoeffizient γ her. Unter dem Einfluss eines zeitabhängigen äußeren elektrischen Feldes $\vec{E}(t)$, das über den Auslenkungsbereich des Elektrons räumlich konstant ist, bewegt sich der Ort \vec{r} des Elektrons gemäß $m_0 \left(\ddot{\vec{r}} + \gamma \dot{\vec{r}} + \omega_0^2 \vec{r} \right) = -e_0 \vec{E}(t)$. Für eine periodische äußere Kraft $\vec{E}(t) = \vec{E}_0 e^{-i\omega t}$ gibt es stationäre Lösungen $\vec{r} = \vec{r}_0 e^{-i\omega t} \Rightarrow \dot{\vec{r}} = -i\omega \vec{r}_0 e^{-i\omega t}$, $\ddot{\vec{r}} = -\omega^2 \vec{r}_0 e^{-i\omega t}$, so dass

$$m_0 \left(-\omega^2 - i\omega\gamma + \omega_0^2 \right) \vec{r}_0 = -e\vec{E}_0 \quad \text{und} \quad \vec{r}_0 = \frac{-e_0/m_0}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma} \vec{E}_0 .$$

Das Dipolmoment $-e_0 \vec{r}$ eines Atoms hängt über die Dipol-Polarisierbarkeit mit dem äußeren Feld zusammen, $\vec{p} = \vec{p}_0 e^{-i\omega t} = \alpha_d \vec{E}(t)$, und die Polarisation des Mediums ist $\alpha_d N$, wobei N die Dichte der Atome bzw. der harmonische gebundenen Elektronen ist (S. 22).

Die dielektrische Suszeptibilität χ des Mediums (S. 23) ist also:

$$\chi = \frac{e_0^2}{m_0 \epsilon_0} \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma)}, \quad \text{und die relative Dielektrizitätskonst. ist } \epsilon = 1 + \chi.$$

Eine Zerlegung in Real- und Imaginärteil, $\epsilon = \epsilon_r + i\epsilon_i$, ergibt

$$\epsilon_r = 1 + \frac{e_0^2 N}{\epsilon_0 m_0} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2}, \quad \epsilon_i = \frac{e_0^2 N}{\epsilon_0 m_0} \frac{\omega \gamma}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2}.$$

Komplexer Brechungsindex: $n = \frac{c_0}{c} \approx \sqrt{\epsilon}$, $n_r \approx +\frac{\epsilon_r - 1}{2}$, $n_i \approx \frac{\epsilon_i}{2}$.

Der Imaginärteil des Brechungsindex führt in einer ebenen Welle

(z.B. in z -Richtung) $\dots \propto e^{i(kz - \omega t)} = e^{i(\Re(k)z - \omega t)} e^{-\Im(k)z}$, $\Im(k) = \frac{\omega}{c_0} \Im(n) \approx \frac{\omega \epsilon_i}{2c_0}$

zur Absorption der Welle in Ausbreitungsrichtung; Eindringtiefe: $\frac{1}{\Im(k)} \approx \frac{2c_0}{\omega \epsilon_i}$.

Allgemeine inhomogene Wellengleichung

Potenziale im zeitabhängigen Fall: $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$, $\vec{E} = -\vec{\nabla} \Phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$.

Eichtransformation: $\vec{A} \rightarrow \vec{A} + \vec{\nabla} f$, $\Phi \rightarrow \Phi - \frac{\partial f}{\partial t}$.

Allgemeine inhomogene Wellengleichungen für die Potenziale:

$$\left(\Delta - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \vec{A} = -\mu_0 \vec{j} + \vec{\nabla} \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right), \quad \Delta \Phi + \frac{\partial}{\partial t} \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A} \right) = -\frac{\rho}{\epsilon_0}.$$

Lorentz-Eichung, $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0$, \longrightarrow

$$\left(\Delta - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}, \quad \left(\Delta - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \Phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}.$$

Allgemeine Lösung der inhomogenen partiellen Differentialgleichung $\mathcal{D}f = g$: $f = f_{\text{hom}} + \int G(x, x') g(x') dx'$.

f_{hom} ist eine Lösung der homogenen Gleichung $\mathcal{D}f_{\text{hom}} = 0$ und die *Greensche Funktion* G ist definiert durch: $\mathcal{D}_x G(x, x') = \delta(x - x')$.

Für den Differentialoperator $\mathcal{D} \equiv \left(\Delta - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right)$ der Wellengleichung

ist die Greensche Funktion $G(\vec{r}, t; \vec{r}', t') = -\frac{1}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}'|} \delta \left(t - t' \pm \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c_0} \right)$.

Formale Lösung der inhomogenen Wellengleichung:

$$\Phi(\vec{r}, t) = \Phi_{\text{hom}}(\vec{r}, t) + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}', t - |\vec{r} - \vec{r}'|/c_0)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r',$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \vec{A}_{\text{hom}}(\vec{r}, t) + \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}', t - |\vec{r} - \vec{r}'|/c_0)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r'.$$

Von der Wahlmöglichkeit \pm in der Greenschen Funktion haben wir die gewählt, die in den Lösungen zu $t - t' - |\vec{r} - \vec{r}'|/c_0$ als Zeitargument von ρ bzw. \vec{j} führt. Dies ergibt die *retardierten Potenziale*: der Wert des Potentials am Ort \vec{r} zur Zeit t hängt ab von der Ladungs- bzw. Stromdichte an den anderen Orten \vec{r}' zu den *früheren* Zeiten $t' = t - |\vec{r} - \vec{r}'|/c_0$. Die andere Wahl führt auf die *avancierten Potenziale*, die unserem Kausalitätsempfinden widersprechen.

Harmonisch oszillierende Ladung- und Stromverteilung:

$$\rho(\vec{r}, t) = \rho_0(\vec{r}) \exp(-i\omega t), \quad \vec{j}(\vec{r}, t) = \vec{j}_0(\vec{r}) \exp(-i\omega t) \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_0 = i\omega \rho_0.$$

Ohne Φ_{hom} , \vec{A}_{hom} und mit $k = \omega/c_0$ sind die Potenziale

$$\Phi(\vec{r}, t) = \frac{e^{-i\omega t}}{4\pi\epsilon_0} \int \rho_0(\vec{r}') \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} d^3r', \quad \vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} e^{-i\omega t} \int \vec{j}_0(\vec{r}') \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} d^3r'.$$

$$\text{Ann: } \max \left\{ |\vec{r}'| : \rho_0(\vec{r}') \neq 0 \text{ oder } \vec{j}_0(\vec{r}') \neq 0 \right\} \ll \lambda = \frac{2\pi}{k} \ll r \Rightarrow kr' \ll 2\pi \ll kr.$$

$$\text{Entwicklung: } \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \approx \frac{e^{ikr}}{r} e^{-i\vec{k}_r \cdot \vec{r}'} \approx \frac{e^{ikr}}{r} \left[1 - i\vec{k}_r \cdot \vec{r}' + O((kr')^2) \right], \quad \vec{k}_r \stackrel{\text{def}}{=} k\hat{e}_r.$$

$$\text{Es gilt: } \int \rho_0(\vec{r}') d^3r' = 0, \quad \int \vec{r}' \rho_0(\vec{r}') d^3r' = \vec{p}_0, \quad \int \vec{j}_0(\vec{r}') d^3r' = -i\omega \vec{p}_0;$$

Beitrag von $-i\vec{k}_r \cdot \vec{r}'$ in [...] zu Φ und von "1" in [...] zu \vec{A} :

$$\Phi_{\text{E1}}(\vec{r}, t) = -i \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{4\pi\epsilon_0 r} \vec{k}_r \cdot \vec{p}_0, \quad \vec{A}_{\text{E1}} = -i \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r} \omega \vec{p}_0.$$

“E1” steht für *elektrische Dipolstrahlung* und drückt aus, dass das elektrische Dipolmoment $\vec{p}_0 e^{-i\omega t}$ hier entscheidend ist. Die zugehörigen Felder sind:

$$\vec{E}_{\text{E1}}(\vec{r}, t) = -\vec{\nabla}\Phi_{\text{E1}} - \frac{\partial \vec{A}_{\text{E1}}}{\partial t} = \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{4\pi\epsilon_0 r} k^2 (\hat{e}_r \times \vec{p}_0) \times \hat{e}_r ,$$

$$\vec{B}_{\text{E1}}(\vec{r}, t) = \vec{\nabla} \times \vec{A}_{\text{E1}} = \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{4\pi\epsilon_0 r} \frac{k^2}{c_0} (\hat{e}_r \times \vec{p}_0) .$$

Die Welle breitet sich in Richtung $\hat{e}_r = \vec{r}/r$ aus, also radial; der \vec{E} -Vektor schwingt senkrecht zu \hat{e}_r in der Ebene von \hat{e}_r und \vec{p}_0 , während der \vec{B} -Vektor senkrecht zu dieser Ebene schwingt. Die maximale Amplitude des \vec{E} -Feldes ist $k^2 |\vec{p}_0| \sin \theta / (4\pi\epsilon_0 r)$, wobei θ der Winkel zwischen \hat{e}_r und \vec{p}_0 ist; die maximale Amplitude des \vec{B} -Feldes ist $k^2 |\vec{p}_0| \sin \theta / (4\pi\epsilon_0 r c_0)$.

Der Term $-i\vec{k}_r \cdot \vec{r}'$ in [...] auf der vorigen Seite liefert auch einen

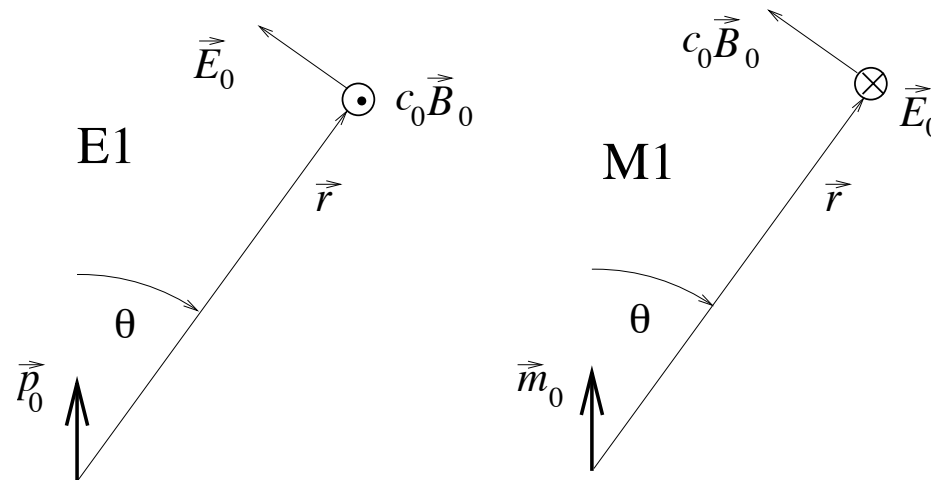
Beitrag zu \vec{A} :
$$\vec{A}_{\text{M1}}(\vec{r}, t) = i \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r} (\vec{k}_r \times \vec{m}_0) , \quad \vec{m}_0 = \frac{1}{2} \int \vec{r}' \times \vec{j}_0(\vec{r}') d^3 r' .$$

Dieser Beitrag rührt vom magnetischen Dipolmoment her, $\vec{m}(t) = \frac{1}{2} \int \vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}', t) d^3r' = \vec{m}_0 e^{-i\omega t}$, und “M1” steht für *magnetische Dipolstrahlung*. Die zugehörigen Felder sind:

$$\vec{B}_{M1}(\vec{r}, t) = \vec{\nabla} \times \vec{A}_{M1} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r} k^2 \hat{e}_r \times (\hat{e}_r \times \vec{m}_0),$$

$$\vec{E}_{M1}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial \vec{A}_{M1}}{\partial t} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r} c_0 k^2 (\hat{e}_r \times \vec{m}_0).$$

Orientierung linearpolarisierter Felder in Dipolstrahlung:

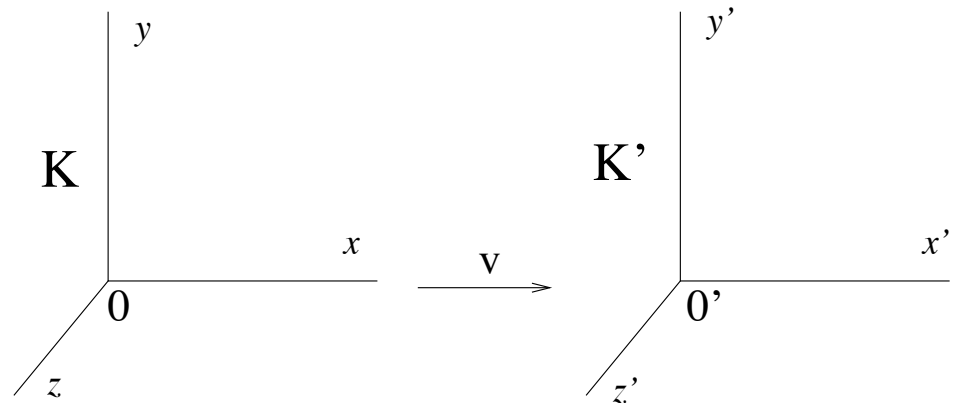


Beiträge höherer Terme in [...] auf der vorvorigen Seite ergeben Strahlung, die von höheren Momenten der Ladungs- und Stromverteilung abhängt, z.B. “elektrische Quadrupolstrahlung”.

4. RELATIVISTISCHE FORMULIERUNG DER ELEKTRODYNAMIK

Für ein Ereignis, das am Ort \vec{r} zur Zeit t stattfindet, wird im Inertialsystem K der Ort durch die Komponenten x, y, z von \vec{r} beschrieben. Im Koordinatensystem K' , das sich mit konstanter Geschwindigkeit \vec{v} relativ zu K bewegt, sind die Komponenten von \vec{r} nach dem “Galileischen Relativitätsprinzip” durch $x' = x - v_x t$, etc. gegeben (Annahme: $K \equiv K'$ zur Zeit $t = 0$). Um der Gleichwertigkeit aller Inertialsysteme und der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit c_0 Rechnung zu tragen, müssen im Rahmen der speziellen Relativitätstheorie nicht nur die Komponenten des Orts sondern auch die Zeit beim Übergang von einem Bezugssystem in ein gleichförmig bewegtes transformiert werden: $(x, y, z, t) \rightarrow (x', y', z', t')$. Die entsprechende Transformation heißt *Lorentz-Transformation*.

Falls $K \equiv K'$ bei $t = 0$
 ist es eine *homogene*
 Lorentz-Transformation,
 und für den speziellen
 Fall $\vec{v} = v\hat{e}_x$ ist sie:



$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c_0^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - xv/c_0^2}{\sqrt{1 - v^2/c_0^2}}.$$

Für ein Teilchen, das sich in K entsprechend $x = u_x t$, $y = u_y t$,
 $z = u_z t$ bewegt, sind die Koordinaten in K':

$$x' = \frac{(u_x - v)t}{\sqrt{1 - v^2/c_0^2}} = u'_x t' \quad \text{mit} \quad u'_x = \frac{u_x - v}{\sqrt{1 - v^2/c_0^2}} \frac{t}{t'} = \frac{u_x - v}{1 - u_x v/c_0^2},$$

$$y' = y = u_y t \Rightarrow u'_y = u_y \frac{t}{t'} = \frac{u_y \sqrt{1 - v^2/c_0^2}}{1 - u_x v/c_0^2}, \quad \text{analog:} \quad u'_z = \frac{u_z \sqrt{1 - v^2/c_0^2}}{1 - u_x v/c_0^2}.$$

Diese relativistische Transformation der Geschwindigkeit gewährleistet,
 im Gegensatz zur Galileischen Kinematik ($u'_x = u_x - v$, etc.), dass die
 Geschwindigkeit in keinem Inertialsystem c_0 überschreitet.

Längenkontraktion: In K ruhe ein Stab der Länge L auf der x -Achse zwischen seinem Anfangspunkt $x_{\text{Anf}} = 0$ und seinem Endpunkt $x_{\text{End}} = L$. In K' , das sich in x -Richtung mit Geschwindigkeit v relativ zu K bewegt, werden Anfangs- und Endpunkt des Stabs zur gleichen Zeit $t' = 0$ gemessen. Die Messung des Anfangspunkts geschieht zur Zeit $t = 0$ in $K \Rightarrow x'_{\text{Anf}} = 0$. Die Messung des

Endpunkts geschieht zur Zeit $t' = 0 = \frac{t - Lv/c_0^2}{\sqrt{1 - v^2/c_0^2}}$, also zu $t = \frac{Lv}{c_0^2}$ in K ,

und der in K' gemessene Endpunkt ist $L' = \frac{L - vLv/c_0^2}{\sqrt{1 - v^2/c_0^2}} = L\sqrt{1 - v^2/c_0^2}$.

Zeitdilatation: Zwei Ereignisse passieren am Ort $\vec{r} = 0$ in K zu den Zeiten $t = 0$ und $t = T$. Im bewegten Bezugssystem K' werden die Zeiten $t' = 0$ und $t' = T/\sqrt{1 - v^2/c_0^2}$ gemessen. Im Ruhesystem einer Uhr geht die Zeit am langsamsten; der zeitliche Abstand zweier Ereignisse erscheint im bewegten Bezugssystem um den Faktor $1/\sqrt{1 - v^2/c_0^2}$ länger.

Die vierdimensionale Raumzeit

Aus den drei Komponenten x, y, z und der Zeit t eines Ereignisses bilden wir den Vektor x mit den vier *kontravarianten Komponenten* $x^0 = c_0 t, x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z$. Sie sind eng verknüpft mit den *kovarianten Komponenten* $x_0 = c_0 t, x_1 = -x, x_2 = -y, x_3 = -z$. Eine homogene Lorentz-Transformation führt die Komponenten von x über in die neuen Komponenten $x'^{\mu} = \sum_{\nu=0}^3 \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu}$, bzw. $x'_{\mu} = \sum_{\nu=0}^3 \Lambda_{\mu}^{\nu} x_{\nu}$. Für den speziellen Fall der vorvorigen Seite ist

$$\Lambda^{\mu}_{\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Lambda_{\mu}^{\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (\Lambda^{-1})^{\nu}_{\mu},$$

wobei $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c_0^2}$ und $\beta = v/c_0$. Das Lorentz-invariante *Skalarprodukt* zweier Vierer-Vektoren x und \tilde{x} ist:

$$\sum_{\mu=0}^3 \sum_{\nu=0}^3 x^{\mu} g_{\mu\nu} \tilde{x}^{\nu} = \sum_{\mu=0}^3 x^{\mu} \tilde{x}_{\mu} = \sum_{\mu=0}^3 x_{\mu} \tilde{x}^{\mu} = c_0^2 t \tilde{t} - x \tilde{x} - y \tilde{y} - z \tilde{z}.$$

Der Unterschied zum gewohnten Euklidischen Raum drückt sich im *metrischen Tensor* aus,

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

mit dem man u.a. kontravariante Komponenten in kovariante um-

wandeln kann — und umgekehrt: $x_\mu = \sum_{\nu=0}^3 g_{\mu\nu} x^\nu$, $x^\mu = \sum_{\nu=0}^3 g^{\mu\nu} x_\nu$.

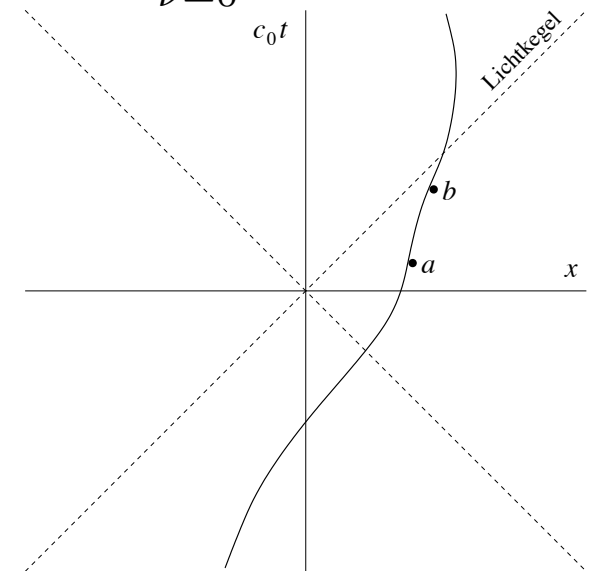
Die Bewegung eines Massenpunkts in der 4-d Raumzeit wird durch eine *Weltlinie* beschrieben. Für zwei Ereignisse a und b auf der Weltlinie gilt: $(b - a)(b - a) = c_0^2(t_b - t_a)^2 - |\vec{r}_b - \vec{r}_a|^2 > 0$; d.h. der Vierer-Vektor $b - a$ ist *zeitartig*.

$x x < 0 \Rightarrow x$ ist ein *raumartiger* Vektor.

$x x = 0 \Rightarrow x$ ist ein *lichtartiger* Vektor.

Ist der Abstand zweier Ereignisse a und b raumartig,

so ist nach Wahl des Inertialsystems $t_b > t_a$, $t_b < t_a$ oder $t_b = t_a$.



Wichtige Vierer-Vektoren

Ableitung: $\frac{\partial}{\partial x^0} = \frac{1}{c_0} \frac{\partial}{\partial t} \stackrel{\text{def}}{=} \partial_0$, $\frac{\partial}{\partial x^1} = \frac{\partial}{\partial x} \stackrel{\text{def}}{=} \partial_1$, $\frac{\partial}{\partial y} \stackrel{\text{def}}{=} \partial_2$, $\frac{\partial}{\partial z} \stackrel{\text{def}}{=} \partial_3$.

$\partial_\mu \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial x^\mu}$, $\partial^\mu \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial x_\mu}$ wegen des Verhaltens bei Lorentz-Trafos:

$$x'^\mu = \sum_{\nu=0}^3 \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu, \quad x^\nu = \sum_{\mu=0}^3 (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu x'^\mu, \quad (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu = \Lambda_\mu{}^\nu$$

$$\implies \partial'_\mu = \frac{\partial}{\partial x'^\mu} = \sum_{\nu=0}^3 \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} = \sum_{\nu=0}^3 \Lambda_\mu{}^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu}.$$

Ladungs- und Stromdichte: $j^0 = c_0 \rho$, $j^1 = j_x$, $j^2 = j_y$, $j^3 = j_z$.

Verhalten bei Lorentz-Trafo: $j'^\mu = \sum_{\nu=0}^3 \Lambda^\mu{}_\nu j^\nu$. Die *Vierer Divergenz* von j^μ

ist ein Lorentz-Skalar: $\sum_{\mu=0}^3 \partial_\mu j^\mu = \frac{1}{c_0} \frac{\partial c_0 \rho}{\partial t} + \frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$,

und die Kontinuitätsgleichung ist einfach: $\sum_{\mu=0}^3 \partial_\mu j^\mu = 0$.

Vierer-Potenzial: $A^0 = \Phi/c_0$, $A^1 = A_x$, $A^2 = A_y$, $A^3 = A_z$.

Lorentz-Eichung: $\sum_{\mu=0}^3 \partial_\mu A^\mu = 0$.

Vierer-Laplace-Operator: $\sum_{\mu=0}^3 \partial_\mu \partial^\mu = \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \stackrel{\text{def}}{=} \square$.

Die inhomogenen Wellengleichungen für die Potenziale Φ und \vec{A} sind in Vierer-Schreibweise einfach: $\square A^\mu = \mu_0 j^\mu$.

Wellenvektor: Der Exponent $i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$ in einer ebenen Welle ist $-i$ mal dem Lorentzinvarianten Skalarprodukt des Vierer-Ortsvektors x^μ mit dem Vierer-Wellenvektor k^μ :

$$k^0 = \frac{\omega}{c_0}, \quad k^1 = k_x, \quad k^2 = k_y, \quad k^3 = k_z, \quad \sum_{\mu=0}^3 k_\mu x^\mu = \sum_{\mu=0}^3 k^\mu x_\mu = \omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}.$$

Zur Berechnung der **Dopplerverschiebung** der Kreisfrequenz ω nutzen wir, dass k^0 die 0-Komponente eines Vierer-Vektors ist:

$$\vec{k} \parallel \vec{v}: \omega' = \omega \frac{1 - v/c_0}{\sqrt{1 - v^2/c_0^2}}, \quad \vec{k} \perp \vec{v}: \omega' = \frac{\omega}{\sqrt{1 - v^2/c_0^2}}.$$

Elektromagnetischer Feldstärketensor

Definition: $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$.

$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \longleftrightarrow F_{12} = -B_z, F_{13} = B_y$ und $F_{23} = -B_x$.

$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi - \partial\vec{A}/\partial t \longleftrightarrow F_{01} = E_x/c_0, F_{02} = E_y/c_0, F_{03} = E_z/c_0$.

Die sechs Komponenten von \vec{E} , \vec{B} sind die sechs unabhängigen Komponenten der antisymmetrischen 4×4 -Matrix:

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{c_0}E_x & \frac{1}{c_0}E_y & \frac{1}{c_0}E_z \\ -\frac{1}{c_0}E_x & 0 & -B_z & +B_y \\ -\frac{1}{c_0}E_y & +B_z & 0 & -B_x \\ -\frac{1}{c_0}E_z & -B_y & +B_x & 0 \end{pmatrix}, \quad F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{c_0}E_x & -\frac{1}{c_0}E_y & -\frac{1}{c_0}E_z \\ \frac{1}{c_0}E_x & 0 & -B_z & +B_y \\ \frac{1}{c_0}E_y & +B_z & 0 & -B_x \\ \frac{1}{c_0}E_z & -B_y & +B_x & 0 \end{pmatrix}.$$

Maxwellgleichungen: (i) $\partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} = 0$, (ii) $\sum_{\mu=0}^3 \partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\nu$.

(i): OBdA $\lambda < \mu < \nu$. $(\lambda, \mu, \nu) = (1, 2, 3)$ liefert $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$.

$\lambda = 0$ und $1 \leq \mu < \nu$ liefert $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial\vec{B}/\partial t$.

(ii): $\nu = 0$ liefert $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0$; $\nu > 0$ liefert $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 (\vec{j} + \epsilon_0 \partial\vec{E}/\partial t)$.

$$\text{Lorentz-Transformation: } F'^{\mu\nu} = \sum_{\eta=0}^3 \sum_{\xi=0}^3 \Lambda^\mu{}_\eta \Lambda^\nu{}_\xi F^{\eta\xi} .$$

Spezialfall, K' bewegt sich mit Geschw. v in x -Richtg relativ zu K:

$$E'_x = E_x$$

$$B'_x = B_x$$

$$E'_y = \frac{E_y - vB_z}{\sqrt{1 - v^2/c_0^2}}$$

$$B'_y = \frac{B_y + E_z v/c_0^2}{\sqrt{1 - v^2/c_0^2}}$$

$$E'_z = \frac{E_z + vB_y}{\sqrt{1 - v^2/c_0^2}}$$

$$B'_z = \frac{B_z - E_y v/c_0^2}{\sqrt{1 - v^2/c_0^2}}$$

Lorentz-invariante Kombinationen der Komponenten von \vec{E} und \vec{B} :

$$\vec{E}' \cdot \vec{B}' = \vec{E} \cdot \vec{B} , \quad \vec{E}'^2 - c_0^2 \vec{B}'^2 = \vec{E}^2 - c_0^2 \vec{B}^2 .$$

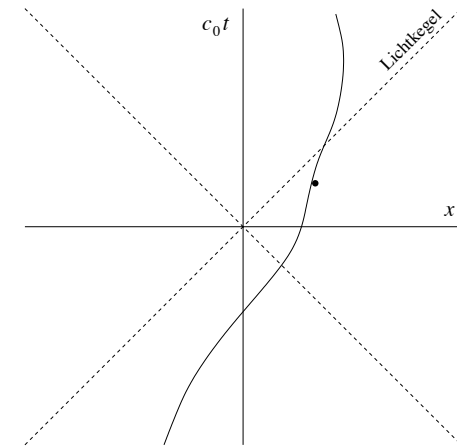
$$\vec{E} \cdot \vec{B} = 0 , \quad \vec{E}^2 > c_0^2 \vec{B}^2 \Rightarrow \text{ex. Inertialsystem in dem } \vec{B}' = 0 ,$$

$$\vec{E} \cdot \vec{B} = 0 , \quad \vec{E}^2 < c_0^2 \vec{B}^2 \Rightarrow \text{ex. Inertialsystem in dem } \vec{E}' = 0 .$$

Relativistische Form von “Kraft=Masse × Beschleunigung”

Momentane Geschwindigkeit eines Teilchens:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}, \quad v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}.$$



Eine Uhr im *momentanen* Ruhesystem des

Teilchens misst die *Eigenzeit* τ : $d\tau = \sqrt{1 - v^2/c_0^2} dt$;

$d\tau$ ist ein Lorentz-Skalar. Eine Geschwindigkeit w^μ , die sich wie Vierer-Vektor transformiert, erhält man durch Ableitung von x^μ nach der Lorentz-invarianten Eigenzeit:

$$w^\mu = \frac{d}{d\tau} x^\mu = \begin{pmatrix} c_0 dt/d\tau \\ dx/d\tau \\ dy/d\tau \\ dz/d\tau \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c_0^2}} \begin{pmatrix} c_0 \\ v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}.$$

Das Lorentz-Skalarprodukt w^μ mit sich ist: $\sum_{\mu=0}^3 w^\mu w_\mu = \frac{c_0^2 - v^2}{1 - v^2/c_0^2} = c_0^2.$

Multiplikation von w^μ mit der Lorentz-invarianten Ruhemasse m_0 des Teilchens gibt den Vierer-Vektor für den relativistischen Impuls:

$$p^\mu = m_0 w^\mu = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c_0^2}} \begin{pmatrix} c_0 \\ \vec{v} \end{pmatrix} .$$

Der Vierer-Vektor b^μ der relativistischen Beschleunigung ist

$$b^\mu = \frac{dw^\mu}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c_0^2}} \begin{pmatrix} 0 \\ d\vec{v}/dt \end{pmatrix} + \frac{1}{c_0^2(1 - v^2/c_0^2)^2} \left(\vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} \right) \begin{pmatrix} c_0 \\ \vec{v} \end{pmatrix} .$$

Eine Lorentz-invariante Form von “Masse×Beschleunigung=Kraft” ist

$$m_0 b^\mu = K^\mu \Leftrightarrow \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c_0^2}} \frac{dw^\mu}{dt} = K^\mu \Leftrightarrow m_0 \frac{dw^\mu}{dt} = \frac{dp^\mu}{dt} = \sqrt{1 - v^2/c_0^2} K^\mu . (\dagger)$$

Der Vierer-Vektor K^μ ist die *Minkowski-Kraft*. Die drei unteren

Komponenten von (\dagger) sind: $\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c_0^2}} \frac{d\vec{v}}{dt} = \sqrt{1 - v^2/c_0^2} \vec{K} = \vec{K}^N .$

Komponente K^0 : Aus $\sum_{\mu=0}^3 w^\mu w_\mu = c_0^2 = \text{const.}$ folgt

$$0 = \frac{d}{d\tau} \sum_{\mu=0}^3 w^\mu w_\mu = 2 \sum_{\mu=0}^3 b^\mu w_\mu = \frac{2}{m_0} \sum_{\mu=0}^3 K^\mu w_\mu \Rightarrow K^0 w^0 = \vec{K} \cdot \vec{v} \Rightarrow K^0 c_0 = \vec{K} \cdot \vec{v} .$$

$\vec{K} = \vec{K}^N / \sqrt{1 - v^2/c_0^2}$ und $\vec{K}^N \cdot \vec{v}$ ist die Arbeit/Zeit, welche die Newtonsche Kraft K^N in das Teilchen steckt, das sich mit Geschwindigkeit \vec{v} bewegt, $= dE/dt$.

$$K^0 = \frac{1}{c_0} \frac{\vec{K}^N \cdot \vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c_0^2}} = \frac{1}{c_0 \sqrt{1 - v^2/c_0^2}} \frac{dE}{dt} .$$

Die Null-Komponente $K^0 = m_0 b^0$ von $K^\mu = m_0 b^\mu$ lautet:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c_0 \sqrt{1 - v^2/c_0^2}} \frac{dE}{dt} &= m_0 \frac{dw^0}{d\tau} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c_0^2}} \frac{d}{dt} \left(\frac{c_0}{\sqrt{1 - v^2/c_0^2}} \right) \\ \implies \frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 c_0^2}{\sqrt{1 - v^2/c_0^2}} \right) &= \frac{dE}{dt} \dots \longrightarrow \dots E = mc_0^2 \quad \text{mit} \quad m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c_0^2}} . \end{aligned}$$

Lorentz-Kraft: $\vec{K}^N = Q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$. Wenn wir in Anlehnung an die Stromdichte einen 4-er-Vektor J^μ für Ladung und Strom durch die Punktladung definieren, $J^0 = Qc_0$, $\vec{J} = Q\vec{v}$, dann ist die Lorentz-Kraft in 4-er-Schreibweise: $K^\mu = \sum_\nu F^{\mu\nu} J_\nu = Q \sum_\nu F^{\mu\nu} w_\nu$.

Mathematische Ergänzungen

Deltafunktion : $\delta(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0, \\ \text{sehr } \infty, & x = 0; \end{cases} \quad \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \delta(x) dx = 1 .$

Allgemeiner: $\int_I \delta(x - x_0) f(x) dx = f(x_0)$, solange $x_0 \in I$.

Explizite Darstellungen:

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm i k x} dk, \quad \delta(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \frac{\sin(kx)}{x}, \quad \delta(x) = \lim_{b \rightarrow 0} (\pi b)^{-1} e^{-x^2/b^2} .$$

Eigenschaften: $\delta(cx) = \frac{1}{|c|} \delta(x)$, $\delta(f(x)) = \sum_{f(x_i)=0} \frac{1}{|f'(x_i)|} \delta(x - x_i)$.

Dreidimensional:

$$\delta(\vec{r}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z), \quad \int_V \delta(\vec{r}) d^3r = 1 \text{ solange } \vec{0} \in V, \quad \Delta \left(\frac{1}{r} \right) = -4\pi \delta(\vec{r}) .$$

Differentiation und Integration von Vektorfeldern

$$\text{Nabla-Operator : } \vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}, \quad \vec{\nabla} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}.$$

Zum skalaren Feld $f(\vec{r})$ definiert $\vec{\nabla} f$ (auch “grad f ”) ein Vektorfeld, das *Gradientenfeld* von $f(\vec{r})$ bzw. den *Gradienten* von f .

Zu einem Vektorfeld $\vec{A}(\vec{r})$ definiert das Skalarprodukt $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$ (auch “div \vec{A} ”) ein skalares Feld, die *Divergenz* von f :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}.$$

Das Vektorprodukt $\vec{\nabla} \times \vec{A}$ (auch “rot \vec{A} ”) definiert ein Vektorfeld,

$$\text{die } \textit{Rotation} \text{ von } \vec{A} : \quad \vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Volumenintegral für skalare Felder und Vektorfelder:

$$\int_V f(\vec{r}) d\tau = \int \int \int_{\vec{r} \in V} f(\vec{r}) dx dy dz, \quad \int_V \vec{A} d\tau = \begin{pmatrix} \int_V A_x d\tau \\ \int_V A_y d\tau \\ \int_V A_z d\tau \end{pmatrix}.$$

Oberflächenintegral für Vektorfelder:

$$\int_{\Omega} \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{\omega} = \lim_{(\Delta\vec{\omega})_i \rightarrow 0} \sum_i \vec{A}_i \cdot \Delta\vec{\omega}_i.$$

Konvention: Für geschlossene Oberflächen zeigt $\Delta\vec{\omega}_i$ nach außen.

Beispiel: $S =$ Oberfläche einer Kugel um $\vec{0}$ mit Radius R ,

$$\int_{\Omega} \vec{r} \cdot d\vec{\omega} = \sum_i \vec{r}_i \cdot \Delta\vec{\omega}_i = R \sum_i |\Delta\vec{\omega}_i| = R 4\pi R^2 = 4\pi R^3.$$

Wegintegral für Vektorfelder: Γ beschreibe einen stetigen und (fast) überall differenzierbaren Weg $\vec{r}(t)$ von $\vec{r}(t_1)$ nach $\vec{r}(t_2)$,

$$\int_{\Gamma} \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{A}(\vec{r}(t)) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt.$$

Sätze von Gauß

Eine Funktion einer Variablen : $\int_a^b \frac{df}{dx} dx = f(b) - f(a)$.

(“Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung”)

Allgemeiner: Integral der Ableitung einer Funktion über ein Gebiet
= Summe (mit Orientierung) der Funktionswerte auf dem Rand

“Satz von Gauß” : $\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{A} d\tau = \oint_{\Omega(V)} \vec{A} \cdot d\vec{\omega}$.

“Satz von Stokes” : $\int_{\vec{\Omega}} (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot d\vec{\omega} = \oint_{\Gamma(\vec{\Omega})} \vec{A} \cdot d\vec{r}$.

Wichtige Folge des Stokesschen Satzes:

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = 0 \iff \oint_{\Gamma} \vec{A} \cdot d\vec{r} = 0 \quad \text{für alle geschlossene Wege } \Gamma$$

$$\iff \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{A} \cdot d\vec{r} \quad \text{hängt nicht vom Weg ab}$$

$$\iff \text{ex. skalares Feld } \Phi(\vec{r}) \text{ mit } \vec{A}(\vec{r}) = \vec{\nabla}\Phi(\vec{r}) .$$

Kugelflächenfunktionen: Das l te Legendre-Polynom $P_l(x)$ ist ein

Polynom vom Grade l in x , $P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l$, $l = 0, 1, \dots$.

Es hat l Nullstellen im Intervall $-1 < x < 1$; $P_l(-x) = (-1)^l P_l(x)$.

Die *assozierten Legendre-Funktionen* $P_{l,m}(x)$, $|x| \leq 1$, sind Produkte von $(1 - x^2)^{m/2}$ mit Polynomen vom Grad $l - m$

$$(m = 0, \dots, l) : \quad P_{l,m}(x) = (1 - x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x) \quad .$$

Die Kugelflächenfunktionen $Y_{l,m}(\theta, \phi)$ für $m \geq 0$,

$$\begin{aligned} Y_{l,m}(\theta, \phi) &= (-1)^m \left[\frac{(2l+1)}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \right]^{1/2} P_{l,m}(\cos \theta) e^{im\phi} \\ &= (-1)^m \left[\frac{(2l+1)}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \right]^{1/2} \sin^m \theta \frac{d^m}{d(\cos \theta)^m} P_l(\cos \theta) e^{im\phi} \quad . \end{aligned}$$

Die $Y_{l,m}$ mit $m < 0$ erhält man über: $Y_{l,-m}(\theta, \phi) = (-1)^m (Y_{l,m}(\theta, \phi))^*$.

Allgemeine Struktur: $Y_{l,m}(\theta, \phi) = (\sin \theta)^{|m|} \text{Pol}_{l-|m|}(\cos \theta) e^{im\phi}$

l	0	1	1	2
m	0	0	± 1	0
$Y_{l,m}$	$\frac{1}{\sqrt{4\pi}}$	$\sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta$	$\mp \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{\pm i\phi}$	$\sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3 \cos^2 \theta - 1)$
l	2	2	2	3
m	± 1	± 1	± 2	0
$Y_{l,m}$	$\mp \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin \theta \cos \theta e^{\pm i\phi}$	$\sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2 \theta e^{\pm 2i\phi}$	$\sqrt{\frac{7}{16\pi}} (5 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta)$	
l	3	3	3	3
m	± 1	± 1	± 2	± 3
$Y_{l,m}$	$\mp \sqrt{\frac{21}{64\pi}} \sin \theta (5 \cos^2 \theta - 1) e^{\pm i\phi}$	$\sqrt{\frac{105}{32\pi}} \sin^2 \theta \cos \theta e^{\pm 2i\phi}$	$\mp \sqrt{\frac{35}{64\pi}} \sin^3 \theta e^{\pm 3i\phi}$	

E N D E

Letzte Aktualisierung: 13.10.2008