Technische Universität München
Physik Department
Prof. Dr. Roland Netz
http://einrichtungen.physik.tu-muenchen.de/T37/teaching.html

Elektrodynamik
Wintersemester 2009/2010
10. November 2009

Theoretische Physik II (Elektrodynamik) – Übungsblatt 4

Aufgabe 1 – **Sphärische Multipolentwicklung**

Das Potenzial einer Ladungsverteilung $\rho(\vec{r})$ kann man nach sphärischen Multipolmomenten Q_{lm} entwickeln:

$$\begin{aligned}
\Phi(r,\theta,\phi) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{l=0}^{+\infty}\frac{1}{r^{l+1}}\sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}\sum_{m=-l}^{+l} Q^*_{lm}\mathrm{Y}_{lm}(\theta,\phi) \qquad \text{und}\\
Q_{lm} &= \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}\int \mathrm{d}^3r\, r^l \mathrm{Y}_{lm}(\theta,\phi)\rho(\vec{r}).
\end{aligned}$$

mit den Kugelflächenfunktionen $Y_{lm}(\theta,\phi) = N_{lm}P_l^m(\cos\theta)e^{im\phi}$, wobei $N_{lm} = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}\sqrt{\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}$. Es gilt:

$$\begin{aligned}
P_l^m(1) = \delta_{m0} = (-1)^l P_l^m(-1)\\
P_l^m(0) = 0 \quad \text{falls } l+m \text{ ungerade.}
\end{aligned}$$

a) Gegeben sei eine sphärische Ladungsverteilung: $\rho(\vec{r}) = \rho(r)$. Zeigen Sie, dass nur der Multipol mit $l = 0$ einen Beitrag liefert und berechnen Sie das Potenzial.

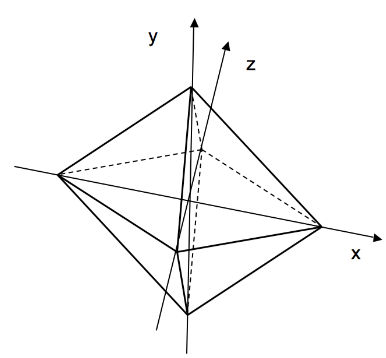
b) Bestimmen Sie das Potenzial eines homogen geladenen, unendlich dünnen Kreisrings in der x-y-Ebene mit Radius R und Gesamtladung Q mittels Multipolentwicklung.

c) Gegeben sei die Ladungsverteilung aus vier Punktladungen $q_1 = q$ bei $\vec{r}_1 = (a,0,0)$, $q_2 = q$ bei $\vec{r}_2 = (-a,0,0)$, $q_3 = -q$ bei $\vec{r}_3 = (0,a,0)$ und $q_4 = -q$ bei $\vec{r}_4 = (0,-a,0)$. Berechnen Sie die Multipolmomente des Systems dieser vier Ladungen allgemein. Für welche Werte von (l,m) verschwinden diese nicht? Berechnen Sie das niedrigste nichtverschwindende Multipolmoment.

d) Wie c), aber nun mit drei Ladungen $q_1 = q$ bei $\vec{r}_1 = (0,0,a)$, $q_2 = q$ bei $\vec{r}_2 = (0,0,-a)$ und $q_3 = -2q$ bei $\vec{r}_3 = (0,0,0)$.

Aufgabe 2 – **Multipolmomente des Oktaeder**

Wir betrachten ein regulären Oktaeder mit Seitenlänge a, dessen Mittelpunkt im Ursprung liegt, und dessen Eckpunkte auf der x,y- und z-Achse liegen.



a) Die Ladung Q ist homogen auf das Innere des Oktaeders verteilt: $\rho(\vec{r}) = \rho_0$. Berechnen Sie die ersten drei kartesischen Multipolmomente (Monopol, Dipole und Quadrupole) bezüglich des angegebenen Koordinatensystems.

b) Schätzen Sie die Stärke der Multipolfelder relativ zum Monopolfeld für große und kleine Abstände vom Oktaeder ab. Welcher Abstand ist "groß", welcher "klein"?

c) Wiederholen Sie die Schritte a) and b) für einen Oktaeder, dessen Ladungsdichte durch $\rho(\vec{r}) = \rho_0\mathrm{sgn}(xyz)$ gegeben ist.