1 Skineffekt, Induktionsheizung

a) Für z>0 gilt die Wellengleichung

$$\left[\nabla^2 - \frac{\mu\epsilon}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]\vec{H} = 0 \tag{1}$$

Mit der angegebenen Randbedingung $\vec{H}(z=0)$ ergibt sich für z>0:

$$\vec{H} = H_0\hat{e_x}\exp[-i\omega(t - nz/c)]$$

Wobei $n(\omega) = \sqrt{\epsilon\mu}$ ist. Bei der quasistatischen Näherung ist ϵ rein imaginär und μ rein reell. Die Wurzel einer komplexen Zahl ist nicht eindeutig und man muss sich die physikalische Lösung suchen. Dies ist diejenige, deren Amplitude nicht zunimmt, während sie das Medium durchdringt. Dazu wählt man die Lösung mit negativem Imaginärteil:

$$n = \sqrt{\frac{\sigma\mu}{\epsilon_0\omega}}\sqrt{i} = +\frac{1+i}{\sqrt{2}}|n| \tag{2}$$

Eingesetzt ergibt das ein exponentiell abfallendes H-Feld:

$$\vec{H} = H_0\hat{e_x}\exp[i\omega(t + |n|z/\sqrt{2}c)]\exp[-\frac{\omega|n|}{\sqrt{2}c}z]$$

Nun kann man abschließend die Skintiefe ablesen:

$$\delta(\omega) = \frac{\sqrt{2}c}{\omega|n|} = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu(\omega)\mu_0\sigma}}$$

b) Hier soll man das elektrische Feld bestimmen und dannach die Beträge des elektrischen und magnetischen Feldes vergleichen. Dazu verwendet man die Maxwell-Gleichung $\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = -rot\vec{E}$. Mit $\vec{k} = k\hat{e_z}$ folgt:

$$cB\hat{e_x} = n(\omega)\hat{e_z} \times \vec{E} \tag{3}$$

Dadurch sind die x und y Komponente des E-Feldes festgelegt. Die z-Komponente ist wegen Vernachlässigung des Verschiebungsstromes automatisch 0. [Ist das so erlaubt... ich glaub aber, dass die Maxwell-Gleichung mit rot H auch liefern würde, dass D_z und E_z 0 sind]. Wegen des Kreuzproduktes ist dann $\vec{E} = -E\hat{e_y}$. Wenn man nun das Verhältnis der Amplituden betrachten will, so kann man den komplexen Charakter von E vergessen und stattdessen den Betrag davon nehmen und man erhält:

$$\frac{c|B|}{|E|} = |n(\omega)| = \frac{\sqrt{2}c}{\omega\delta} \gg 1$$

c) Unter Vernachlässigung des Verschiebungsstromes gilt (Maxwell-Gleichung):

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j} \tag{4}$$

Da $\vec{H} = H(z)\hat{e_x}$ ist, folgt $\vec{j} = j\hat{e_y}$ mit

$$j = \frac{\partial H(z)}{\partial z} = H_0 \exp[-i\omega(t - nz/c)](i\frac{n\omega}{c}) \tag{5}$$

Da man nun 2 reelle Größen (j und E) multiplizieren will, die man bisher nur komplex dargestellt hat, muss man zuerst die Realteile dieser 2 berechnen. Dazu benützt man $n = |n| \exp[i\frac{\pi}{4}]$ und $i = \exp[-i\frac{\pi}{2}]$. Aus Gleichungen (3) und (5) folgt dann:

$$E_{phys} = \Re\left[-\frac{c\mu\mu_0 H_0}{|n| \exp[i\frac{\pi}{4}]} \exp[-z/\delta] \exp[-i\omega t + iz/\delta]\right] \tag{6}$$

$$= -\frac{c\mu\mu_0 H_0}{|n|} \exp[-z/\delta] \cos[\omega t - z/\delta + \pi/4] \tag{7}$$

$$j_{phys} = \Re\left[-H_0 \frac{|n| \exp[i\frac{\pi}{4}]\omega}{c} \exp[-i\frac{\pi}{2}] \exp[-z/\delta] \exp[-i\omega t + iz/\delta]\right] \tag{8}$$

$$= -\frac{H_0|n|\omega}{c} \exp[-z/\delta] \cos[\omega t - z/\delta + \pi/4] \tag{9}$$

Die Zeitmittelung des $\cos^2(...)$ ergibt genau 1/2. und man erhält damit als Ergebnis:

$$< \vec{j}\vec{E} >_t = \frac{\omega\mu\mu_0}{2} H_0^2 \exp[-2z/\delta] \tag{10}$$

Dies ist die Leistung pro Volumen. Nun muss man noch über den Raum integrieren, um die gesamte Heizleistung zu erhalten.

$$\int d^3x < \vec{j}\vec{E} >_t = \frac{1}{\sigma\delta^2} H_0^2 \frac{\delta}{2} = \sqrt{\frac{\omega\mu\mu_0}{8\sigma}} H_0^2 \tag{11}$$

Für eine möglichst effektive Induktionsheizung muss also μ groß, σ klein und die eingestrahle Frequenz ω groß sein.

2 Retardierte Potentiale

a) Gesucht war die retardierte Lösung der Wellengleichung

$$\Box\Psi_r(t,\vec{r}) = -h(t,\vec{r}) = -\delta(t)\delta(x)\delta(y) \tag{12}$$

Dazu verwendet man die Greensche Funktion zum Quabla-Operator:

$$G(\vec{r},t;\vec{r'},t') = -\frac{1}{4\pi|\vec{r}-\vec{r'}|}\delta(t-t'-\frac{|\vec{r}-\vec{r'}|}{c}) \tag{13}$$

Die Lösung für das retardierte Potential ergibt sich dann aus der Faltung der Greenschen Funktion mit der Quelle $h(t',\vec{r'})$: (Integrale ohne Grenzen laufen von $-\infty$ bis ∞)

$$\Psi_r(t,\vec{r}) = \int d^3r' \int dt' h(t',\vec{r'})G(\vec{r},t;\vec{r'},t') \tag{14}$$

Zusätzlich kann natürlich eine beliebige Lösung der homogenen Wellengleichung addiert werden, aber dies ist für die Aufgabe nicht interressant. Dies muss man nun noch für die gegebene Quelle auswerten. Nach der t'-Integration bleibt noch:

$$\begin{aligned}
\Psi_r(t,\vec{r}) &= \int d^3r' \frac{1}{4\pi|\vec{r}-\vec{r'}|}\delta(t-|\vec{r}-\vec{r'}|)\delta(x')\delta(y') \\
&= \int dz' \frac{1}{4\pi\sqrt{x^2+y^2+(z-z')^2}}c\delta(ct-\sqrt{x^2+y^2+(z-z')^2}) \\
&= 2\int_0^\infty du' \frac{1}{4\pi\sqrt{x^2+y^2+(u)^2}}c\delta(ct-\sqrt{x^2+y^2+u^2})
\end{aligned}$$

Dabei wurde von der ersten zur 2. Zeile der Betrag in Komponenten ausgeschrieben und die Delta-Integrale ausgeführt. Von der 2. zur 3. Zeile wurde die Substitution $u = z' - z$ vorgenommen und dann die Achsensymmetrie ausgenutzt, um das Integral nur über die positive u-Achse laufen zu lassen. Man will nun die Delta-Distribution $\delta(f(u))$ in einen Ausdruck $\delta(u-\lambda)$ umformen und verwendet dazu die Identität von Blatt 2. Dazu benötigt man die Nullstellen von $f(u) = ct - \sqrt{x^2+y^2+u^2}$:

$$x^2+y^2+u^2 = (ct)^2 \rightarrow u_{1/2} = \pm\sqrt{(ct)^2-x^2-y^2}$$

Normalerweise müssten wir später die Summe der beiden (mit Vorfaktor) nehmen, jedoch haben wir schon vorab die Symmetrie ausgenutzt. Man könnte aber auch die Summe nehmen und würde so den Faktor 2 später erhalten. Außerdem benötigt man noch den Betrag der Ableitung von $f(u)$:

$$|f'(u)| = |-\frac{2u}{2\sqrt{x^2+y^2+u^2}}|$$

Schließlich muss man noch beachten, dass erst ab einem gewissen t eine Lösung existiert (da sonst Ψ komplex ist):

$$\begin{aligned}\Psi_r(t,\vec{r}) &= 2\int_0^\infty \frac{c}{4\pi\sqrt{x^2+y^2+u^2}}\left|-\frac{2u}{2\sqrt{x^2+y^2+u^2}}\right|^{-1}\theta(ct-\sqrt{x^2+y^2})\delta(u-\sqrt{(ct)^2-x^2-y^2})\\ &= \frac{2c}{4\pi\sqrt{(ct)^2-x^2-y^2}}\theta(ct-\sqrt{x^2+y^2})\end{aligned}$$

b) Dieses mal hat man die Wellengleichung:

$$\Box\vec{A_r}(t,\vec{r}) = -\mu_0 I_0 \hat{e_z} h(t,\vec{r}) = -\mu_0 I_0 \hat{e_z}\delta(t)\delta(x)\delta(y) \tag{15}$$

Man sieht, dass die z-Komponente die Wellengleichung aus a) erfüllt, während die anderen beiden Komponenten die homogene Wellengleichung erfüllen. Wenn man die homogenen Lösungen wieder außer Acht lässt, erhält man:

$$\vec{A} = \hat{e_z}\frac{2c\mu_0 I_0}{4\pi\sqrt{(ct)^2-x^2-y^2}}\theta(ct-\sqrt{x^2+y^2}) \tag{16}$$

Mit $\Phi = 0$ (keine vorhandene Ladungsdichte) erfüllt dies die Lorentzeichung. Nun kann man die gesuchten Felder erhalten aus:

$$\vec{E} = -\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \tag{17}$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} \tag{18}$$

Dabei muss man auch die Thetafunktion „ableiten“, wobei gilt:

$$\begin{aligned}\partial_t\theta(ct-\sqrt{x^2+y^2}) &= c\delta(ct-\sqrt{x^2+y^2})\\ \partial_x\theta(ct-\sqrt{x^2+y^2}) &= -\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\delta(ct-\sqrt{x^2+y^2})\end{aligned}$$

Es ergibt sich:

$$\begin{aligned}\vec{E}(t,\vec{r}) &= \hat{e_z}\frac{2c^2\mu_0 I_0}{4\pi\sqrt{(ct)^2-x^2-y^2}}\left(\frac{ct\ \theta(ct-\sqrt{x^2+y^2})}{(ct)^2-x^2-y^2}-\delta(ct-\sqrt{x^2+y^2})\right)\\ \vec{B}(t,\vec{r}) &= \hat{e_x}\frac{2cy\mu_0 I_0}{4\pi\sqrt{c^2t^2-x^2-y^2}}\left(\frac{\theta(ct-\sqrt{x^2+y^2})}{(ct)^2-x^2-y^2}-\frac{\delta(ct-\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)-\\ &\quad -\hat{e_y}\frac{2cx\mu_0 I_0}{4\pi\sqrt{c^2t^2-x^2-y^2}}\left(\frac{\theta(ct-\sqrt{x^2+y^2})}{(ct)^2-x^2-y^2}-\frac{\delta(ct-\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\end{aligned}$$

3 Dipolantenne

a) Die Ladungsdichte ist $\rho(\vec{r}, t) = \delta(\vec{r} - \vec{r_q(t)})$. Für das Dipolmoment ergibt sich daraus (in komplexer Darstellung, eigentlich nur der Realteil davon):

$$\vec{p}(t) = \int d^3r \vec{r} \rho(\vec{r}, t) = x_0 \exp(-i\omega t)\hat{e_x} = \vec{p_0} \exp(-i\omega t)$$

b) Zur Lösung der Aufgabe sieht man sich am besten den Monopolterm der Ladung getrennt von der Dipolschwingung an. Das Potentialfeld des Monopolterms ist:

$$\Phi_{MP}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Nun kann man die restliche Ladungsverteilung in der Fernfeldnäherung als zeitlich oszillierende Ladungsverteilung auffassen, da das Dipolmoment die Ladungsverteilung bestimmt, und es gilt $\rho_p(\vec{r}, t) = \rho(\vec{r}) \exp(-i\omega t)$. Dann kann man wie in der Vorlesung vorgehen (Seite 49 Friedrich Skript): Der Strom $\vec{j} = \vec{j_0}(\vec{r}) \exp(-i\omega t)$ erfüllt die Kontinuitätsgleichung, weshalb $\vec{\nabla} \vec{j_0} = i\omega\rho_p$ gilt. Dieser Strom ist auch ungefähr richtig für die volle Ladungsverteilung, da sich von der Entfernung aus betrachtet die Anzahl der Ladungen selbst ja nicht ändert, sondern nur der Ladungsschwerpunkt [-> Dipol]. Nun kann man mit der retardierten Greenschen Funktion Φ_p und analog $\vec{A}$ bestimmen.

$$\Phi_p = \frac{\exp(-i\omega t)}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \frac{\rho_p(r') \exp(i\frac{\omega}{c}|\vec{r} - \vec{r'}|}{|\vec{r} - \vec{r'}|}$$

Nun definiert man $\vec{k} = \hat{e_r}\omega/c$ und führt dann die folgende Näherung aus:

$$\frac{\exp(ik|\vec{r} - \vec{r'}|}{|\vec{r} - \vec{r'}|} \approx \frac{exp(ikr}{r}(1 - i\vec{k}\vec{r'})$$

Es folgt, dass in 1. Näherung die zeitlich oszillierende Ladungsverteilung $\rho_p(\vec{r}, t)$ folgende Potentialfelder erzeugt:

$$\Phi_p \approx -i\frac{\exp(i(kr - \omega t))}{4\pi\epsilon_0 r}\vec{k}\vec{p_0}$$
$$\vec{A} \approx -i\frac{\mu_0 \exp(i(kr - \omega t))}{4\pi r}\omega\vec{p_0}$$

Daraus kann man dann das elektrische und magnetische Feld (zuerst ohne den Monopol) bestimmen:

$$\vec{E_p} = \frac{exp(i(kr - \omega t))}{4\pi\epsilon_0 r}k^2(\hat{e_r} \times \vec{p_0}) \times \hat{e_r}$$
$$\vec{B} = \frac{exp(i(kr - \omega t))}{4\pi\epsilon_0 r}\frac{k^2}{c}(\hat{e_r} \times \vec{p_0})$$

Man kann nachprüfen, dass der Monopolterm via den Maxwellgleichungen kein zusätzliches B-Feld erzeugt, da er zeitunabhängig ist und zudem seine Rotation verschwindet. Außerdem kann man an dieser Stelle feststellen, dass er zwar einen Beitrag zum Poynting-

Vektor liefert, dieser sich aber bei der zeitlichen Mittelung zu 0 wird, weshalb er hier gleich weggelassen wird! Wenn man noch den Winkel θ als Winkel zwisschen Dipolachse und $\vec{r}$ definiert, so folgt:

$$\vec{S}_p = \Re[\vec{E}_p] \times \Re[\vec{H}] = \frac{\sin^2(\theta)\hat{e_r}}{c} \left[\frac{p_0 k^2 \cos^2(kr - \omega t)}{4\pi\epsilon_0 r} \right]^2$$

c) Die Zeitmittelung ergibt wie gewohnt den Faktor 1/2. Die Faktoren r^2 kürzen sich, $\hat{e_r}\hat{e_r} = 1$ und man erhält:

$$< \frac{dP}{d\Omega} >_t = \frac{\sin^2(\theta)}{2c} \left[\frac{p_0 k^2}{4\pi\epsilon_0} \right]^2$$

Die Winkelabhängigkeit ist gegeben durch den $\sin^2(\theta)$, der besagt, dass in x-Richtung keine Energie ausgestrahlt wird, während senkrecht dazu die abgestrahlte Energie maximal ist.

d) Nun muss man nur noch über den kompletten Raumwinkel integrieren, um die gesamte (zeitlich gemittelte) abgestrahlte Leistung zu erhalten:

$$\int_{-1}^{1} d\cos(\theta)(1 - \cos^2(\theta)) = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

$$< P >_t = \frac{4\pi}{3c} \left[\frac{p_0 k^2}{4\pi\epsilon_0} \right]^2$$