TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
MÜNCHEN

Prof. Roland Netz
Lehrstuhl Weiche Materie T37
netz@ph.tum.de

Mechanik der Kontinua
Blatt 12 - Deformationen und lineare Elastizitätstheorie

http://www.physik.tu-muenchen.de/lehrstuehle/T37/teaching.html
Ausgabe 19.01.09

1. Dehnung ε: Zeigen Sie, dass die Dehnung ε durch den Verschiebungsvektor $\mathbf{s}$ in Kugelkoordinaten als

$$\varepsilon = \varepsilon^{ii} = \frac{\partial s_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial s_\theta}{\partial_\theta} + \frac{2}{r}s_r + \frac{1}{rsin\theta}\frac{\partial s_\phi}{\partial \phi} + \frac{s_\theta cos\theta}{rsin\theta}$$

ausgedrückt werden kann.

2. Spannungstensor einer Hohlkugel Betrachten Sie eine Hohlkugel mit Innenradius R_1 und Außenradius R_2. Auf die Hohlkugel wirken ein innerer Druck p_1 und ein äußerer Druck p_2.

   (a) Zeigen Sie, dass sich die Gleichung der linearen Elastizitätstheorie ohne äußeren Kräfte aufgrund der Symmetrie zu $s'' + \alpha(\frac{s}{r})' = 0$ vereinfacht, wobei s das Deformationsfeld ist.

   (b) Berechnen Sie die Komponenten des Spannungstensors für gegebene elastische Konstanten, das Elastizitätsmodul E und die Poissonzahl ν.

3. Verschiebungsfeld eines Festkörpers: Das Gleichgewichts–Verschiebungsfeld eines homogenen, isotropen Festkörpers der Dichte ρ mit den Lamé Konstanten $\lambda > 0$ und $\mu > 0$ ist gegeben durch

$$\mathbf{s}(\mathbf{r}) = \left(\frac{3}{2}r_1^2 + 2r_1r_2 - 4r_3\right)\mathbf{e}_1 + \left(-2r_1 + r_3^2\right)\mathbf{e}_2 + \left(-2r_2r_3\right)\mathbf{e}_3$$

   (a) Berechnen Sie den Deformations– und Rotationstensor.

   (b) Berechnen Sie den Spannungstensor.

   (c) Bestimmen Sie die wirkenden Volumenkräfte.

   (d) Berechnen Sie die Deformationen entlang der Hauptachsen im Punkt (1,0,-3).

4. Verzerrungstensor: Es sei der Verschiebungsvektor $\mathbf{s} = 5r_1\mathbf{e_1} + (r_2 + 2r_3)\mathbf{e_2} + (2r_2 + r_3)\mathbf{e_3}$ gegeben.

(a) Berechnen und diagonalisieren Sie die Dehnungsmatrix ε_{ij} im Punkt (1,2,3).

(b) Berechnen Sie die Rotationsmatrix D_{ij} im Punkt (1,2,3).

5. Laminare Strömung: Betrachten Sie die laminare Strömung einer inkompressiblen Flüssigkeit mit homogener Dichte ρ_0 und Viskosität η in einer senkrecht stehenden Röhre mit Radius R. Die Flüssigkeitsbewegung wird durch die Gravitationsbeschleunigung g verursacht.

   (a) Berechnen Sie das Geschwindigkeitsfeld.

   (b) Berechnen Sie den Volumenfluss durch den Querschnitt der Röhre.

   (c) Berechnen Sie die Komponenten des Reibungstensors.

   (d) Berechnen Sie die auf die Röhrenwand wirkenden Reibungskräfte.