TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Prof. Roland Netz
Lehrstuhl Weiche Materie T37
netz@ph.tum.de

Mechanik der Kontinua
Blatt 12 — Deformationen

http://www.ph.tum.de/lehrstuehle/T37/teaching.html

Ausgabe 18.01.07

1) Zerlegung einer Tensors: Jeder Tensor zweiten Ranges kann in einen symmetrischen und einen antisymmetrischen Anteil zerlegt werden,

$$B_{kl} = B_{(kl)} + B_{[kl]} ,$$

wobei der antisymmetrische Anteil durch

$$B_{[kl]} = -B_{[lk]} = \frac{1}{2}(B_{kl} - B_{lk})$$

gegeben ist, und der symmetrische durch

$$B_{(kl)} = B_{(lk)} = \frac{1}{2}(B_{kl} + B_{lk}) .$$

Der symmetrische Anteil setzt sich aus einem isotropen und einem spurfreien Anteil zusammen,

$$B_{(kl)} = \bar{B}_{kl} + \bar{\bar{B}}_{kl} ,$$

dabei ist

$$\bar{B}_{kl} = \frac{1}{2} B_{mm} \delta_{kl}$$

der isotrope Anteil, und

$$\bar{\bar{B}}_{kl} = B_{(kl)} - \frac{1}{2} B_{mm} \delta_{kl}$$

der spurfreie.

Zerlegen Sie die Matrix B für die folgenden Beispiele und skizzieren Sie die durch die verschiedenen Anteile vermittelten Transformationen. Wenden Sie die Transformationen auf ein Quadrat der Kantenlänge 1 an und analysieren Sie die Resultate in linearer Näherung.

$$\texttt{a)}\ B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \quad \texttt{b)}\ B = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \texttt{c)}\ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\alpha & 1 \end{pmatrix} ,$$

wobei $\alpha \ll 1$.

d) Superponieren Sie die in b) und c) gegebenen Transformationen. Was ist die Funktion der beiden Bestandteile?

2) Dehnung in krummlinigen Koordinaten: Zeigen Sie, dass die Dehnung ε folgendermaßen durch den Verschiebungsvektor $\mathbf{s}$ ausgedrückt werden kann:

a) In Zylinderkoordinaten:

$$\varepsilon = \varepsilon^{ii} = \frac{\partial s_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial s_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r}s_r + \frac{\partial s_z}{\partial z}$$

b) In Kugelkoordinaten:

$$\varepsilon = \varepsilon^{ii} = \frac{\partial s_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial s_\theta}{\partial \theta} + \frac{2}{r}s_r + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial s_\phi}{\partial \phi} + \frac{s_\theta \cos\theta}{r\sin\theta}$$

3) Verzerrungstensor: Es sei das Verschiebungsvektor

$$\mathbf{s} = (r_1^2 + r_2 r_3)\mathbf{e}_1 + (r_1 r_2^2 + r_3^2)\mathbf{e}_2 + r_1 r_2 r_3 \mathbf{e}_3$$

gegeben.

a) Berechnen und diagonalisieren Sie die Dehnungsmatrix ε_{ij} im Punkt $(1, 2, 3)$.

b) Berechnen Sie die Rotationsmatrix D_{ij} im Punkt $(1, 2, 3)$.