TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Prof. Roland Netz
Lehrstuhl Weiche Materie T37
netz@ph.tum.de

Mechanik der Kontinua
Blatt 1 — Vektor und Tensorcalculus

http://www.ph.tum.de/lehrstuehle/T37/teaching.html

Ausgabe 19.10.06, Rückgabe 26.10.06

1) Epsilon-Tensor: Das generalisierte Permutations-Symbol der Stufe n ist definiert als $\varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_n} = 1$ für eine gerade Permutation der Indizes, $\varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_n} = -1$ für eine ungerade Permutation, und $\varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_n} = 0$ wenn mindestens zwei Indizes gleich sind. Zeigen Sie, dass für das Permutations-Symbol gilt:

a) $\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij} = 2!$

b) $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} = 3!$

c) $\varepsilon_{ijkl}\varepsilon_{ijkl} = 4!$

d) Berechnen Sie $\varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_n}\varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_n}$.

2) Gaußscher Integralsatz: Beweisen Sie den Gaußschen Integralsatz für den Spezialfall einer zylindrischen Röhre die von einer Flüssigkeit mit Geschwindigkeit $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y, z) = (0, 0, v(z))$ durchströmt wird. Das Integrationsvolumen sei der Zylinder.

3) Stokesscher Integralsatz: Beweisen Sie den Stokesschen Integralsatz für den Spezialfall einer quaderförmigen Röhre der Breite a und Höhe b die von einer Flüssigkeit mit Geschwindigkeit $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y, z) = (\gamma z, 0, 0)$ durchströmt wird. Die Integrationsoberfläche sei der Querschnitt der Röhre.

4) Differenzialoperatoren des Vektorfeldes: Berechnen Sie die Rotation $\nabla \times \mathbf{v}$, die Divergenz $\nabla \cdot \mathbf{v}$, und den Gradienten $\nabla \mathbf{v}$ der folgenden Vektorfelder:

a) Ein Wirbelfeld $\mathbf{v} = \omega \times \mathbf{z}$, ω sei ein ortsunabhängiger konstanter Vektor.

b) Ein Quellenfeld $\mathbf{v} = v_0 \mathbf{r}$, v_0 sei konstant.

c) Ein Scherfeld $\mathbf{v} = (\gamma z, 0, 0)$, γ sei konstant.

5) Vektor-Identitäten: Beweisen Sie die folgenden Vektor-Identitäten:

a) $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$

b) $\nabla \times \nabla \phi = 0$, ϕ sei ein Skalarfeld

c) $\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A} = 0$

Tipp: Benutzen Sie die $\varepsilon - \delta$ Identität: $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{imn} = \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}$