

Statistische Mechanik und Thermodynamik Blatt 12 - Quantenstatistik

<http://www.physik.tu-muenchen.de/lehrstuehle/T37/teaching.html>
Ausgabe 07.07.09 [**VORRECHNEN ZUSAMMEN MIT Blatt 11**]

1. Boltzmann-, Bose- und Fermi-Statistik: Betrachten Sie ein System von $N = 2$ (spinlosen) Teilchen mit drei Einteilchenzuständen $\epsilon_0 = 0$, $\epsilon_1 = \epsilon$ und $\epsilon_2 = 2\epsilon$. Bestimmen Sie die kanonische Zustandssumme für den Fall, dass die Teilchen der
 - (a) Boltzmann-Statistik gehorchen und unterscheidbar sind.
 - (b) Boltzmann-Statistik gehorchen und ununterscheidbar sind.
 - (c) Fermi-Statistik gehorchen.
 - (d) Bose-Statistik gehorchen.
 Zeichnen Sie dazu die möglichen Kongurationen auf.
2. Zwei-Teilchen Wellenfunktion: Betrachten Sie ein System bestehend aus zwei Teilchen der Masse m in einem ein-dimensionalen Kasten der Länge L . Die Aufenthaltswahrscheinlichkeiten der Teilchen an den Kastenwänden soll verschwinden.
 - (a) Ausgehend von den Ein-Teilchen Wellenfunktionen $u_n(x)$, konstruieren Sie die expliziten Zwei-Teilchen Wellenfunktionen $\psi_{n,m}(x, y)$ für den Fall von Bosonen und (spinlosen) Fermionen.
 - (b) Geben Sie die Grundzustandsenergie und die Energie der ersten beiden angeregten Zustände für den Fall von Bosonen und Fermionen an.
 - (c) Der Erwartungswert des Abstandes zwischen den beiden Teilchen, $\langle x - y \rangle$, verschwindet. Berechnen Sie den Erwartungswert des quadratischen Abstandes, $\langle (x - y)^2 \rangle$, für den Fall von Bosonen und Fermionen im Grundzustand. Vergleichen Sie die Ergebnisse mit dem entsprechenden Ergebnis für klassische Teilchen und interpretieren Sie kurz das Resultat.
3. Potential für Bosonen und Fermionen: Die effektive Zwei-Teilchen Wechselwirkung die die Symmetrie-Eigenschaften der Wellenfunktion korrekt berücksichtigt, ist $\tilde{v} = -k_B T \ln\left(1 \pm e^{-2\pi r^2/\lambda^2}\right)$ wobei das Pluszeichen für Bosonen und das Minuszeichen für Fermionen steht. Skizzieren Sie das Potential in der Form $\beta\tilde{v}(r/\lambda)$ für Bosonen und Fermionen. Untersuchen Sie dafür das Verhalten der Funktion für $r/\lambda \rightarrow 0$ und $r/\lambda \rightarrow \infty$.
4. Innere Energie von idealen Fermionen: Betrachten Sie ein (spinloses) System von idealen Fermionen im grokanonischen Ensemble und berechnen Sie die innere Energie U . Drücken Sie das Resultat mit Hilfe der in der Vorlesung eingeführten Funktion $f_{5/2}(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^i (-1)^{i+1}}{i^{5/2}}$ aus. Leiten sie daraus und aus dem in der Vorlesung angegebenen Resultat für $P/(k_B T)$ eine Gleichung ab, die U, P und V verknüpft.