Technische Universität München
Physik Department T37
Prof. Dr. R. Netz

Garching, 03.07.2007
Vorrechnen: 11.-12.07.2007

12. Übung zur Vorlesung Theoretische Physik 5A:
Stat. Mechanik u. Thermodynamik, SS 07
www.ph.tum.de/lehrstuehle/T37/teaching.html

Aufgabe 12.1: *Zwei-Teilchen Wellenfunktion*

Betrachten Sie ein System bestehend aus zwei Teilchen der Masse m in einem ein-dimensionalen Kasten der Länge L. Die Aufenthaltswahrscheinlichkeiten der Teilchen an den Kastenwänden soll verschwinden.

a) Ausgehend von den Ein-Teilchen Wellenfunktionen $u_n(x)$, konstruieren Sie die expliziten Zwei-Teilchen Wellenfunktionen $\psi_{n,m}(x, y)$ für den Fall von Bosonen und (spinlosen) Fermionen.

b) Geben Sie die Grundzustandsenergie und die Energie der ersten beiden angeregten Zustände für den Fall von Bosonen und Fermionen an.

c) Der Erwartungswert des Abstandes zwischen den beiden Teilchen, $\langle x - y \rangle$, verschwindet. Berechnen Sie den Erwartungswert des quadratischen Abstandes, $\langle (x - y)^2 \rangle$, für den Fall von Bosonen und Fermionen im Grundzustand. Vergleichen Sie die Ergebnisse mit dem entsprechenden Ergebnis für klassische Teilchen und interpretieren Sie kurz das Resultat.

Aufgabe 12.2: *Virialkoeffizient für Bosonen und Fermionen*

In der Vorlesung wurde die effektive Zwei-Teilchen Wechselwirkung hergeleitet, die die Symmetrie-Eigenschaften der Wellenfunktion korrekt berücksichtigt,

$$\tilde{v}(\mathbf{r}) = -k_B T \ln\left(1 \pm \mathrm{e}^{-2\pi r^2/\lambda^2}\right),$$

wobei das Pluszeichen für Bosonen und das Minuszeichen für Fermionen steht.

a) Skizzieren Sie das Potential in der Form $\beta\tilde{v}(r/\lambda)$ für Bosonen und Fermionen. Untersuchen Sie dafür das Verhalten der Funktion für $r/\lambda \to 0$ und $r/\lambda \to \infty$.

b) Berechnen Sie den zweiten Virialkoeffizienten mit Hilfe der klassischen Virialentwicklung. Für welchen mittleren Abstand a der Teilchen ist der Beitrag des zweiten Virialterms zum Druck gleich dem des ersten (idealen) Terms? Nehmen Sie dabei an, dass die Teilchendichte $c = a^{-3}$.

c) Betrachten Sie drei verschiedene Gase bestehend aus jeweils Elektronen, Wasserstoff-, und Sauerstoff-Molekülen. Nehmen Sie einen mittleren Abstand von a=1nm zwischen den Teilchen an. Bei welcher Temperatur werden nach dem in a) hergeleiteten Kriterium Quanteneffekte wichtig?

Aufgabe 12.3: *Boltzmann-, Bose- und Fermi-Statistik*

Betrachten Sie ein System von $N = 2$ (spinlosen) Teilchen mit drei Einteilchenzuständen $\epsilon_0 = 0$, $\epsilon_1 = \epsilon$ und $\epsilon_2 = 2\epsilon$. Bestimmen Sie die kanonische Zustandssumme für den Fall, dass die Teilchen der

a) Boltzmann-Statistik gehorchen und unterscheidbar sind.

b) Boltzmann-Statistik gehorchen und ununterscheidbar sind.

c) Fermi-Statistik gehorchen.

d) Bose-Statistik gehorchen.

Zeichnen Sie dazu die möglichen Konfigurationen auf.

Aufgabe 12.4: *Innere Energie von idealen Fermionen*

a) Betrachten Sie ein (spinloses) System von idealen Fermionen im großkanonischen Ensemble und berechnen Sie die innere Energie U. Drücken Sie das Resultat mit Hilfe der in der Vorlesung eingeführten Funktion

$$f_{5/2}(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^i(-1)^{i+1}}{i^{5/2}}$$

aus. Leiten sie daraus und aus dem in der Vorlesung angegebenen Resultat für $P/(k_B T)$ eine Gleichung ab, die U, P und V verknüpft.

b) Berechnen Sie aus dem in a) hergeleiteten Ergebnis die zwei führenden Terme der inneren Energie im Limes tiefer Temperaturen. Benutzen Sie dazu die Ergebnisse $I_0 = 1$, $I_1 = 0$, $I_2 = \pi^2/3$ für das Integral

$$I_n = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t \frac{t^n e^t}{(1+e^t)^2}.$$