

## 4.2 Wärmeleitung

### 4.2.1 Isolatoren

Allgemein gilt für die Wärmeleitfähigkeit (vgl. Kap. 3.2.5):

$$k = \frac{1}{3} C v l$$

dabei ist:  $C$ : Wärmekapazität  
 $v$ : Teilchengeschwindigkeit ( $\approx$  Schallgeschwindigkeit im Festkörper)  
 $l$ : mittlere freie Weglänge

Fig. 4.14 zeigt den Verlauf der Wärmeleitfähigkeit mit der Temperatur für reines LiF. Untersucht wurden verschiedene Probenquerschnitte (Probe A-D). Dabei zeigte sich, daß bei tiefen Temperaturen ( $T \leq 10\text{K}$ ) die Wärmeleitfähigkeit vom Probenquerschnitt abhängt und mit kleinerem Querschnitt zunimmt. Dies kennen wir bereits vom SF He, siehe Kap. 3.2.2. Der Grund ist auch hier wieder, daß keine Streuung im Probenvolumen erfolgt, sondern nur an den Oberflächen. Dann wird die mittlere freie Weglänge durch den Probendurchmesser gegeben. Damit ist sie unabhängig von der Temperatur. Auch  $v$  ist temperaturunabhängig, so daß wir wegen  $C \sim T^3$  (Debye) auch  $\kappa \sim T^3$  erwarten. Dies stimmt sehr gut mit dem Experiment, Fig. 4.14, überein.

Im Innern der Probe breiten sich die Phononen also geradlinig, ohne Streuung aus. Man spricht daher von „ballistischen“ Phononen.

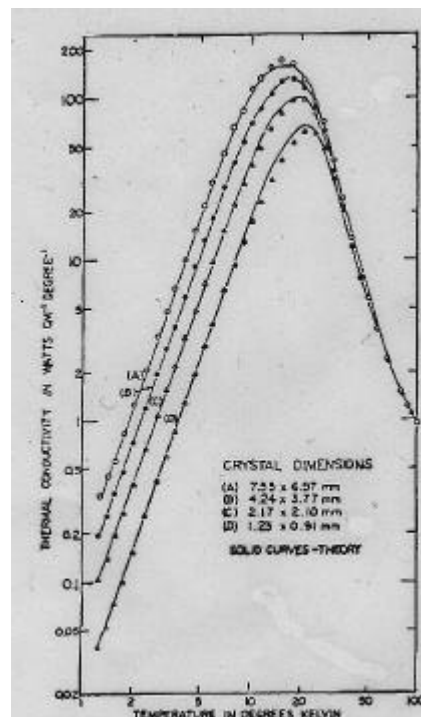


Fig. 4.14: Verlauf der Wärmeleitfähigkeit für reines LiF mit der Temperatur für verschiedene Probenquerschnitte (aus: Pohl).

Nun betrachten wir mit  $\text{Li}^+$ -Ionen dotiertes KCl. Für verschiedene Dotierungen bei gleichem Probenquerschnitt zeigt Fig. 4.15 die Ergebnisse. Es zeigt sich ein breites Minimum bei ca. 0,8 K, das mit zunehmender Dotierung tiefer wird.

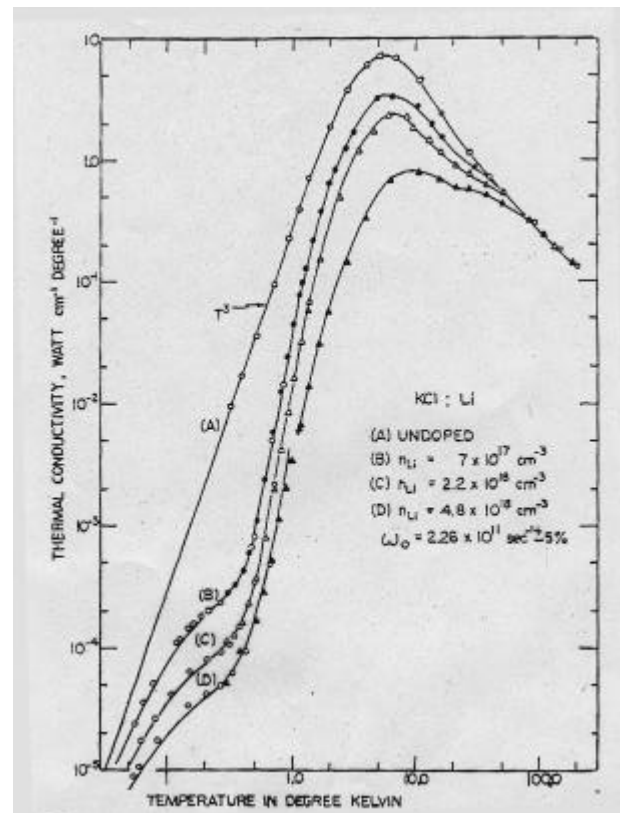


Fig. 4.15: Verlauf der Wärmeleitfähigkeit mit der Temperatur für KCL:Li (aus: Pohl)

Wie wir aus Kap. 4.1.1 wissen, bildet  $\text{Li}^+$  in KCl Tunnelzustände mit vier äquidistanten Niveaus. Phononen können zwischen diesen Übergänge induzieren, wie in Fig. 4.16 angedeutet. Bei der Absorption eines Phonons mit passender Energie geht das  $\text{Li}^+$  in einen angeregten Zustand über, der dann unter Emission eines Phonons wieder relaxiert. Das emittierte Phonon hat beliebige Richtung. Insgesamt wird das Phonon also gestreut, wenn seine Energie dem Niveauabstand entspricht. Der Vorgang heißt daher „Resonanzstreuung“. Diese kennen wir bereits aus der Optik. Durchstrahlt man Natriumdampf mit weißem Licht, so sieht dieses von der Seite her betrachtet gelb aus, da nur diese Wellenlänge an der gelben Na-Linie resonant gestreut wird.

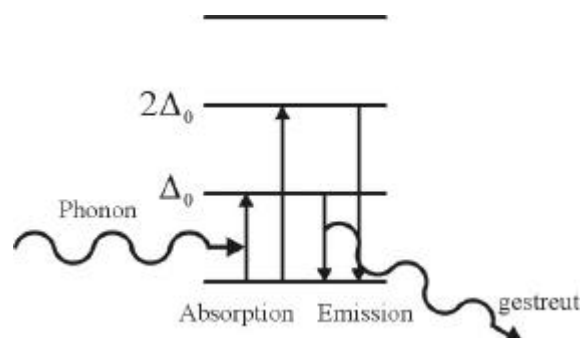


Fig. 4.16: Streuung der Phononen an den  $\text{Li}^+$ -Tunnelzuständen.

Für Phononen sind Dipol- und Quadrupol-Übergänge erlaubt. Es können daher gemäß Fig. 4.16 Übergänge mit  $\hbar\omega = D_0$  und  $\hbar\omega = 2D_0$  stattfinden. Die mittlere freie Weglänge wird dadurch frequenzabhängig, wie in Fig. 4.17 angedeutet. Da sich die mittlere Frequenz der Phononen mit steigender Temperatur erhöht, ist für  $k_B T \gg D_0 \dots 2D_0$  die mittlere freie Weglänge besonders kurz, so daß sich das Minimum der Wärmeleitungskurve verstehen läßt. Allerdings werden die beiden möglichen Übergänge nicht getrennt aufgelöst, da das thermische Phononenspektrum zu breit ( $\sim k_B T$ ) ist.

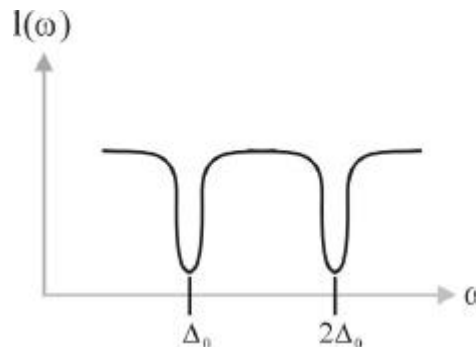


Fig. 4.17: Abhängigkeit der mittleren freien Weglänge  $l$  von der Frequenz  $\omega$

Ähnliche Wirkung auf die Wärmeleitung wie  $\text{Li}^+$ -Ionen haben auch sog. Massendefekte. Ein Beispiel ist KCl mit Ag-Verunreinigungen auf K-Plätzen. Ag ist schwerer als K und bildet daher mit dem umgebenden Gitter (Fig. 4.18) ein Masse-Feder-System, dessen Resonanz in den Frequenzbereich der akustischen Phononen fällt. Auch hier zeigt die Wärmeleitungsmessung (Fig. 4.19) wieder Minimum, aus dessen Lage die Resonanzfrequenz bestimmt werden kann.

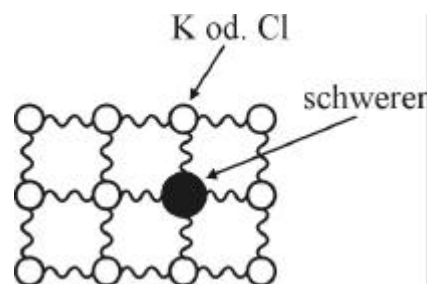
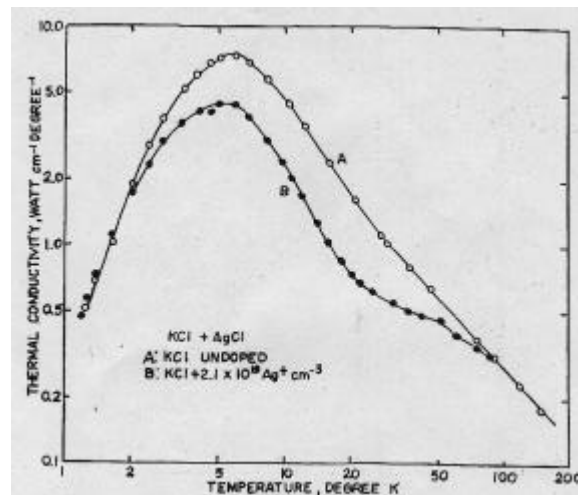


Fig. 4.18: KCl:Ag-Kristall

Fig. 4.19: Wärmeleitfähigkeit von KCl bzw. KCl:Ag<sup>+</sup> (aus: Pohl)

Massendefektstreuung tritt auch ohne Verunreinigungen auf, wenn der Kristall ein Isotopengemisch enthält. In Fig. 4.20 ist die Wärmeleitfähigkeit für natürliches und isotonenreines Ge gezeigt. Die Isotopenstreuung ist besonders bei hohen Frequenzen, d.h. bei hohen Temperaturen wirksam. Bei Temperaturen oberhalb des Maximums wird sie jedoch durch die exponentiell einsetzenden Umklappprozesse überdeckt.

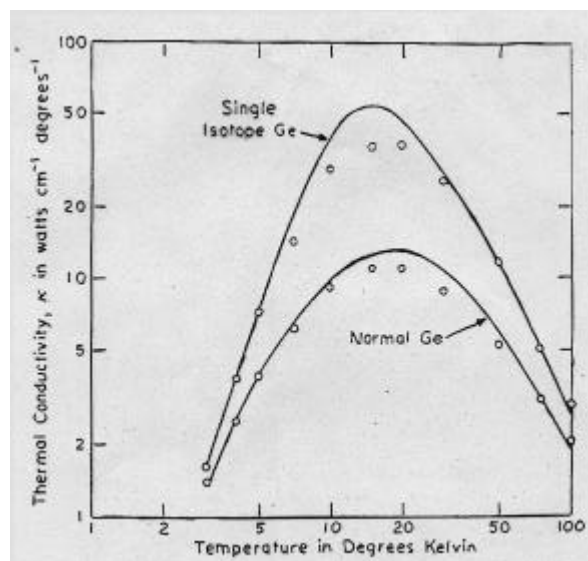


Fig. 4.20: Einfluß des Isotopeneffektes auf die Wärmeleitfähigkeit für Ge (aus: Pohl)

Isotopenreine Elemente sind Na und F. Daher tritt in NaF keine Isotopenstreuung auf. Aus diesem Grund konnte dort der 2. Schall beobachtet werden, vgl. Kap. 3.2.5.

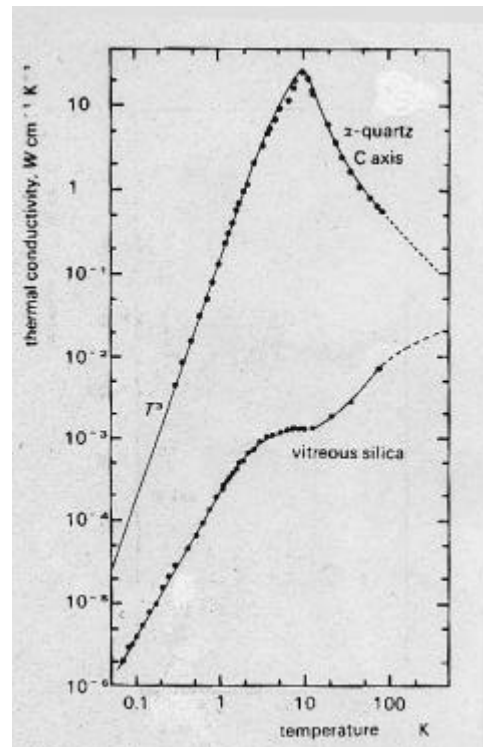
Wie wir aus Kap. 4.1.2 wissen, sind auch in Gläsern lokalisierte Zustände vorhanden, die allerdings eine breite Verteilung von Anregungsenergien besitzen. Diese wollen wir im nächsten Kapitel betrachten.

### 4.2.2 Wärmeleitung in Gläsern

Wegen der breiten Verteilung der Anregungsenergien erwarten wir in Gläsern bei allen Temperaturen Phononenstreuung. In Fig. 4.21 wird die gemessene Wärmeleitfähigkeit von Quarzglas (vitreous silica) mit der von kristallinem Quarz verglichen. Der Quarzkristall zeigt das bekannte Verhalten mit  $T^3$ -Anstieg, Maximum und Abfall durch U-Prozesse. Dagegen zeigt das Quarzglas nur einen  $T^2$ -Anstieg, anstelle des Maximums nur ein Plateau, aber anschließend einen erneuten Anstieg, so daß sich die Kurven annähern und bei Zimmertemperatur fast zusammen laufen.

Der  $T^2$ -Anstieg bei tiefen Temperaturen bedeutet, daß  $\ell \sim 1/T$  sein muß, da ja  $C \sim T^3$  ist. Genau dies erwartet man für 2-Niveau-Systeme („two level systems“, TLS) mit konstanter Zustandsdichte, da deren Kopplung an die Phononen proportional zur Frequenz bzw. Temperatur zunimmt. Ursache ist die abnehmende Wellenlänge und die dadurch zunehmende Gitterdeformation der Phononen.

Fig. 4.21: Verlauf der Wärmeleitfähigkeit mit der Temperatur für kristallinen Quarz und Quarzglas (aus: Pohl).



Das Plateau bei mittleren Temperaturen ist möglicherweise eine „Erinnerung“ an die im Kristall bei diesen Temperaturen einsetzenden Phonon-Phonon-Prozesse, wobei jedoch wegen der fehlenden Gitterperiodizität der Quasiimpuls nicht erhalten bleibt und auch nicht zwischen N- und U-Prozessen unterschieden werden kann.

Am Ende des Plateaus ist die mittlere freie Weglänge mit der Gitterkonstanten vergleichbar und kann daher nicht weiter abnehmen. Da aber die Zahl der Phononen weiter zunimmt, steigt die Wärmeleitfähigkeit wieder an.

In der Tieftemperaturphysik ist nicht nur der Wärmetransport innerhalb eines Materials wichtig, sondern auch der Transport über Grenzflächen. Insbesondere spielt die Grenzfläche zwischen Festkörpern und der Kühlflüssigkeit Helium eine große Rolle. Dieser wird im nächsten Kapitel behandelt.

### 4.2.3 Kapitza-Widerstand

Als erster untersuchte Kapitza im Jahr 1940 den Wärmetransport im He II. Dazu führte er das in Fig. 4.22 gezeigte Experiment durch.

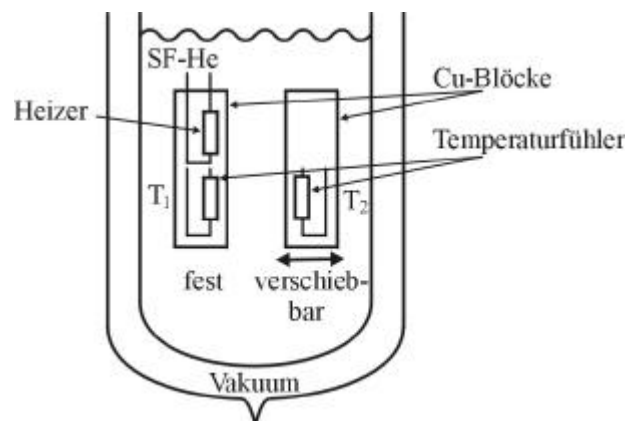


Fig. 4.22: Experimenteller Aufbau von Kapitza zur Bestimmung der Wärmeleitung

Ein Kupferblock (feststehend) wird durch einen Heizwiderstand mit einer Wärmeleistung  $P=U\mathcal{I}$  erwärmt. Da die Wärme ins umgebende He II abfließt, stellt sich im Block eine stationäre Temperatur  $T_1$  ein, die mit einem Thermometer (temperaturabhängiger Widerstand) gemessen wird. Die Wärmeleistung in der Kühlflüssigkeit wird durch ein Thermometer  $T_2$  gemessen, das sich in einem zweiten, verschiebbaren Kupferblock befindet. Als überraschendes Ergebnis zeigte sich, daß zwar ein endlicher Wärmewiderstand  $R=(T_1-T_2)/P$  vorhanden war, doch dieser nicht vom Abstand der Kupferblöcke abhing. Es konnte sich also nicht um den Wärmewiderstand des He II selbst handeln, sondern nur um einen Grenzflächenwiderstand beim Übertritt der Wärme vom Kupfer zum Helium. Der von Kapitza erstmals beobachtete Grenzflächenwiderstand

$$R_K = \frac{T_1 - T_2}{P}$$

wird als Kapitza-Widerstand bezeichnet.

Wie bei Kupfer so tritt er auch bei allen anderen Festkörpern auf. Der erste Erklärungsversuch stammt von Khalatnikov (1952). Danach erfolgt der Wärmetransport durch die Grenzfläche durch Transmission der (longitudinalen) Phononen des SF He in den Festkörper und umgekehrt. Dies ist schematisch in Fig. 4.23 für die Richtung vom Festkörper zum Helium gezeigt.

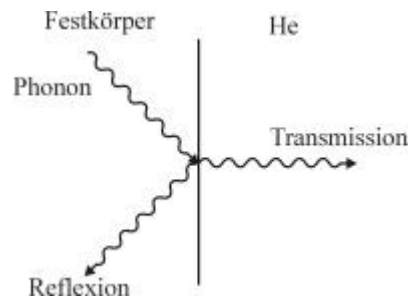


Fig. 4.23: Wärmetransport aufgrund der Transmission von Phononen durch eine Grenzfläche.

Wie in der Optik (Fresnelsche Formeln) wird dabei ein Teil der Phononen reflektiert. Bei senkrechtem Einfall ist der Transmissionskoeffizient für die Intensität einer Schallwelle gegeben durch:

$$t = \frac{4Z_1Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2}$$

dabei ist  $Z \equiv \rho \cdot v$  die akustische Impedanz, mit der Dichte  $\rho$  und der Schallgeschwindigkeit  $v$ .  $Z$  entspricht dem Brechungsindex in der Optik. Für Cu ist  $\rho = 9 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$  und  $v_L = 4,8 \cdot 10^3 \text{ m/s}$ , für Helium dagegen  $\rho = 0,14 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$  und  $v_L = 0,24 \cdot 10^3 \text{ m/s}$ , so daß  $Z_{\text{Cu}} \sim 10^3 Z_{\text{He}}$  ist. Dieser große Unterschied wird als „akustische Fehlanpassung“ (acoustic mismatch) bezeichnet. Für den Transmissionskoeffizienten ergibt sich daraus  $t = 0,4 \%$ . Es werden also nur wenige Phononen transmittiert.

Der Kapitza-Widerstand ergibt sich daraus nach Khalatnikov zu:

$$\frac{1}{R_K} \approx \frac{1}{4} C_{FK} v_{FK} t$$

Wegen  $C \sim T^3$  sollte also  $R_K \sim T^{-3}$  sein. Dies wurde experimentell bestätigt und galt anfangs als Bestätigung der Khalatnikov-Theorie. Quantitative Messung zeigten aber später, daß  $R_K$  100-mal kleiner ist als nach der Theorie erwartet. Also müsste  $t \approx 40\%$  sein anstelle  $t = 0,4\%$ . Dies wird als „anomale Transmission“ bezeichnet. Genauere Information wurde später durch Experimente mit Phononenpulsen gewonnen, die wir später in Kap 4.3.2 besprechen werden.

Viel weniger interessant als die Wärmeleitung der Isolatoren ist die der Metalle.

**4.2.4. Metalle:**

Wie für Phononen gilt auch für die Elektronen im Metall:

$$\mathbf{k}_{el} = \frac{1}{3} C v^2 \mathbf{t} \quad \text{mit } l = v \mathbf{t} \quad (\mathbf{t} = \text{Streuzeit})$$

wobei  $\mathbf{t}$  die mittlere Streuzeit der Elektronen ist. Aus der Festkörperphysik wissen wir, daß  $C_{el}$  sehr klein ist, so lange  $T \ll T_F$ . Trotzdem zeigen Metalle besonders hohe Wärmeleitfähigkeit. Der Grund ist, daß die Elektronen um 2-3 Größenordnungen schneller sind als die Phononen, und daß die Geschwindigkeit quadratisch eingeht. Die Streuzeit  $\mathbf{t}$  findet sich ebenfalls in der elektrischen Leitfähigkeit:

$$\mathbf{s} = \frac{ne^2 \mathbf{t}}{m} \sim \mathbf{t}$$

Wegen  $\mathbf{k}_{el} \sim C \mathbf{t} \sim T \mathbf{t}$  ist also auch:

$$\mathbf{k}_{el} \sim T \mathbf{s}$$

Dies ist das „Wiedemann-Franz-Gesetz“.

Mit der Proportionalitätskonstante  $L$  ist

$$\mathbf{k}_{el} = L T \mathbf{s}$$

$L$  heißt „Lorentz-Zahl“ und kann durch

$$L = \frac{\mathbf{p}^2}{3} \left( \frac{k_B}{e} \right)^2$$

genähert werden (siehe Kittel).

Gute elektrische Leiter sind also auch gute Wärmeleiter. Aus diesem Grund verwendet man reine Metalle um gute Wärmeleitung und Legierungen um schlechte Wärmeleitung zu ermöglichen.

Beispiel:

Ein Probenhalter für ein Tieftemperatur-Experiment wird aus Cu konzipiert, damit die Temperatur aufgrund der hohen Wärmeleitung im gesamten Halter gleich ist. Dieser Halter wird jedoch mit Legierungs-Werkstoffen an der Kryostatenwand befestigt, um keine Wärme von außen zuzuführen.